



EXPLORACIÓN DEL POTENCIAL PARA APRENDER ÁLGEBRA A TRAVÉS DEL DESCUBRIMIENTO Y GENERALIZACIÓN DE PATRONES

Luis Rolando Padilla
luis.rockmat@gmail.com
UPNFM – Honduras

Lilian Nohemy López
lilianohemy@gmail.com
UPNFM – Honduras

Evelin Johana Lagos
johanalagos12@gmail.com
UPNFM – Honduras

Josué Alejandro Izaguirre
alejandroche85@gmail.com
UPNFM – Honduras

RESUMEN

El siguiente documento contiene, de manera breve, la fundamentación teórica, sobre la que hemos concebido como base para justificar la aplicación del proyecto de investigación, y algunos resultados sobre el proyecto el cual trata sobre la exploración del potencial del alumno de 7mo grado de aprender algebra a través del descubrimiento y generalización de patrones, que es el foco del proyecto, teniendo en cuenta las implicaciones históricas, cognitivas, pedagógicas y didácticas.

PALAVRAS-CHAVE: álgebra, aritmética, patrón, generalización, variable

ABSTRACT

The following document contains, briefly, the theoretical foundation, on which we have conceived as a basis to justify the application of the research project, and some results about the project which deals with the exploration of the potential of the 7th grade student to learn algebra through the discovery and generalization of patterns, which is the focus of the project, taking into account the historical, cognitive, pedagogical and didactic implications.

KEYWORDS: algebra, arithmetic, pattern, generalization, variable

INTRODUCCIÓN

Como estudiantes y profesores de matemáticas hemos podido observar la dificultad en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en todo nivel educativo en especial en el nivel medio, específicamente al momento de introducir a los estudiantes al estudio del álgebra. Ursini (1996) señala que los “problemas subsisten cuando se tratan de manipular los símbolos literales o usarlos en problemas que requieren de una simbolización algebraica para su solución”, esto es porque los estudiantes aún no comprenden el verdadero significado de variable. Los problemas que tienen que ver con la enseñanza y el aprendizaje del álgebra subrayan la crisis de la enseñanza tradicional que vivimos en las aulas en la mayoría de los colegios públicos nacionales. Es necesario inducirlos a la elaboración de estrategias que le permitan comprender el verdadero significado de conceptos matemáticos específicamente los del álgebra. Rosalba Romero y otros autores (2007), en su artículo “Iniciación al álgebra a través de actividades funcionales y de generalización” señalan que los obstáculos cognitivos principales de la enseñanza tradicional están ligados a la aritmética que frecuentemente se enfoca en los resultados de los procesos de cálculo más que en los aspectos relacionales y estructurales, y son los que se oponen al desarrollo del pensamiento algebraico.

Es reconocido que la actividad matemática consiste en la búsqueda de regularidades y patrones con el objeto de establecer generalizaciones y a partir de ellas hacer predicciones. Un acercamiento al álgebra puede lograrse a través de actividades de generalización que implican el reconocimiento y manipulación de objetos matemáticos. Por otra parte Ursini (1996) propone “La necesidad de diseñar ambientes especiales para ayudar a los alumnos a acercarse a nociones matemáticas nuevas usando sus conocimientos previos como soporte”. Manuel Cardona (2007), dice que al analizar el Currículo Nacional Básico (CNB, 2005) se encuentra, en el tercer ciclo, unidades de álgebra referidas a ecuaciones en las que la metodología propuesta hace especial hincapié en la estrategia de la resolución de problemas como medio para propiciar el desarrollo del pensamiento matemático. Además, el CNB en la descripción del currículo de matemáticas para el tercer ciclo (Pág. 10) define a la matemática como una disciplina que sistematiza la capacidad intuitiva del ser humano de poder encontrar las ideas necesarias para resolver problemas.

Los profesores de matemáticas han transmitido a los alumnos una idea incompleta del significado del álgebra considerándola como la manipulación de símbolos con actividades de simplificación de expresiones algebraicas o de resolución de ecuaciones o inecuaciones. Claro

está que estas actividades son fundamentales y constituyen las raíces históricas del álgebra, pero el álgebra es más que manipular símbolos. Al respecto el NCTM (2000) afirma que: “los estudiantes necesitan comprender (del álgebra) sus conceptos, las estructuras y principios que rigen la manipulación de símbolos y cómo pueden usarse éstos para registrar ideas y ampliar su comprensión de las situaciones”

IDENTIFICACIÓN Y GENERALIZACIÓN DE PATRONES

La habilidad de generalizar se refiere a la posibilidad de encontrar patrones numéricos o geométricos; un “patrón” es una secuencia de elementos que tienen una regla o un orden. Pueden ser clasificados como patrones: repetidos y crecientes. Los patrones repetidos son aquellos que tienen una secuencia fija de elementos que se repiten. En cambio, los patrones crecientes son los que tienen elementos que cambian según una regla. (Glosario de Términos Matemáticos). El concepto de patrón es esencial en matemáticas. Sin tener conciencia de ello, los estudiantes trabajan con patrones mucho antes, incluso, de aprender a sumar. En cuanto a generalizar, se puede decir que es hacer juicio desde lo particular, es decir, tomar de la observación empírica de un caso o casos particulares y llevarlos a la universalización. Normalmente cuando se repite un caso particular existe la tendencia a generalizar, cuanta mayor repetición existe en la experiencia particular más fuerte es la generalización.

¿APRENDEMOS ÁLGEBRA DESCUBRIENDO PATRONES?

Reconocer patrones, describirlos y expresar esos patrones de diferentes maneras es una de las claves para la generalización en matemáticas. Se han propuesto en investigaciones como las de John Mason (apud CASALLAS, ESTRELLA, 2001), varias aproximaciones posibles que pueden conducir a los estudiantes a la construcción de fórmulas: la visualización; la manipulación de la figura en la cual se basa el proceso de generalización, facilitando, en relación con ésta, la construcción de la fórmula; la formulación de una regla recursiva que muestra cómo construir los términos siguientes a partir de los precedentes; y el hallazgo de un patrón que los guíe directamente a la fórmula.

Es importante reconocer que este proceso de acercamiento de un pensamiento numérico al algebraico (generalización de patrones) ha presentado, a través de la historia, muchas dificultades y una ruptura entre lo concreto y lo abstracto. Por lo que el papel del docente

consiste en el diseño de estrategias metodológicas que inicien con situaciones problemas que permitan analizar, organizar y modelar situaciones tanto de la vida diaria del estudiante como de otras disciplinas científicas y que conlleven a procesos de generalización de expresiones algebraicas.

LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA BASADA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DESDE LA CONCEPCIÓN DE “HACER MATEMÁTICA”.

La conceptualización de Polya (apud CANALES, CASTRO, 2007) sobre la matemática como una actividad se evidencia en la siguiente cita:

“Para un matemático, que es activo en la investigación, la matemática puede aparecer algunas veces como un juego de imaginación: hay que imaginar un teorema matemático antes de probarlo; hay que imaginar la idea de la prueba antes de ponerla en práctica... A los estudiantes se les debe brindar alguna oportunidad de resolver problemas en los que primero imaginen y luego prueben alguna cuestión matemática adecuada a su nivel.”

La utilización de los términos “problema” y “resolución de problemas” ha tenido múltiples significados a través de los años, un primer significado es el de resolver problemas como parte del contexto, es aquí donde los problemas son utilizados para mostrar el valor de la matemática en la resolución de algunos problemas relacionados con experiencias de la vida cotidiana. Esto es, la resolución de problemas es vista como un facilitador de logro de otros objetivos. Un segundo significado es resolver problemas como una habilidad, es decir, que el estudiante sea capaz de resolver problemas no rutinarios una vez que haya resuelto problemas rutinarios, esta es una habilidad superior, que se adquiere a través del aprendizaje de conceptos y desarrollo de destrezas matemáticas. Y el tercer significado es el que ocupa nuestro interés, debido a que concibe la resolución de problema como “Hacer Matemática”.

Según Vilanova (2003), este significado se basa en “creer que el trabajo de los matemáticos es resolver problemas y que la matemática realmente consiste en problemas y soluciones”. Para Rico (apud CASALLAS, ESTRELLA, 2001), desde la educación matemática, las estrategias se definen como las formas de actuación o ejecución de tareas matemáticas, que se ejecutan sobre representaciones de conceptos y relaciones. Las estrategias operan dentro una estructura conceptual y supone cualquier tipo de procedimiento que pueda ejecutarse, teniendo en cuenta las recomendaciones y los conceptos implicados. Según Cardona

(2007): “Con la resolución de problemas se pretende que el alumno aplique y adapte diversas estrategias para resolver un problema. La diversidad de estrategias con las que cuenta un alumno va a depender de su capacidad para conectar sus ideas o conceptos matemáticos con la situación que está resolviendo. Cuando los estudiantes pueden conectar sus ideas matemáticas, su comprensión es más profunda y duradera. Pueden ver conexiones entre los temas matemáticos, en contextos que relacionan las matemáticas con otras disciplinas y en sus propios intereses y experiencias”.

¿CUÁL ES EL ÉNFASIS QUE SE PROPONE EN LAS CONCEPCIONES ACTUALES DE LA MATEMÁTICA?

Los principios y estándares para la educación matemática proponen una manera integral para llevar a cabo currículos matemáticamente sólidos, formar profesores competentes y por supuesto que los estudiantes reciban una formación matemática de calidad.

En dichos estándares se sugiere que los programas de enseñanza deberían capacitar a los estudiantes en cuanto al álgebra para:

- Comprender patrones, relaciones y funciones.
- Representar y analizar situaciones, estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos.
- Usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas.
- Analizar el cambio en contextos diversos.

Por otra parte, en Honduras el Currículo Nacional Básico (CNB) es el documento que comprende las expectativas de logro a nivel nacional. Dicho documento señala que, en la enseñanza, la matemática es una disciplina vinculada al desarrollo de las estructuras del pensamiento lógico, la capacidad de abstracción, a los procesos deductivos e inductivos y en la capacidad de síntesis y análisis. Con la apropiación de procesos y métodos de carácter cuantitativo, simbólico y gráfico, se cuenta con un instrumento de apoyo indispensable para los diferentes campos del saber.

METODOLOGÍA

I. TIPO DE INVESTIGACIÓN

Este estudio es una investigación de tipo cualitativo, con el fin de explorar el potencial para aprender álgebra que puede desarrollarse en los estudiantes de 7° grado a través del reconocimiento y generalización de patrones. Los investigadores se interrelacionan con el objeto de estudio y tratan de entender las acciones de los estudiantes cuando se plantean patrones geométricos y numéricos.

II. POBLACIÓN Y MUESTRA

La población estudiada fueron los estudiantes que cursaron el 7° grado sección “U” del Instituto Evangélico “Desarrollo Integral” de la Colonia El Pedregal, en Comayagüela, M.D.C. La muestra fue un grupo de 13 estudiantes, que estaban entre las edades de 11 y 13 años. Dichos estudiantes deberían poseer conocimientos básicos de aritmética, es decir, hacer uso adecuado de las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación, división y cálculo de potencias) con números naturales.

III. MÉTODOS Y TÉCNICAS

Para la recolección de información se utilizó la investigación acción como método de investigación cualitativa, se aplicó una prueba diagnóstica, se propusieron actividades en las cuales los estudiantes pudieran reconocer diferentes patrones (numéricos y geométricos) utilizando diferentes estrategias para lograr generalizarlos. Se aplicaron pruebas escritas, se realizaron algunas entrevistas para discutir las estrategias; se registraron ideas de interés que surgieron en la interacción con los estudiantes y en las observaciones directas sobre el desempeño de éstos, durante las actividades.

Se analizó la situación de la enseñanza del álgebra en séptimo grado, a través de la inspección de algunos textos de apoyo, se identificaron dificultades en los estudiantes para manipular variables cuando se introduce al estudio del álgebra. Además se realizaron actividades para apoyar a comprender y manipular expresiones algebraicas. Uno de los propósitos fue elaborar una guía de ejercicios con patrones geométricos y numéricos que puede servir al docente para despertar en los estudiantes el interés, mejorando así el proceso de Enseñanza-Aprendizaje. Con cada secuencia de figuras o números se permitió en primer lugar, que los estudiantes trabajaran individualmente, luego en una ocasión discutieron en equipos, y

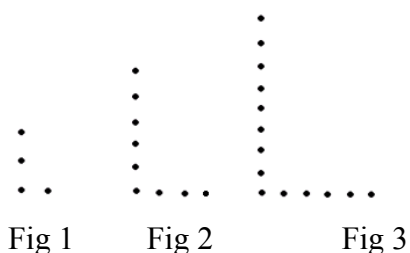
siempre se discutía con el grupo en general. En último lugar, se aplicó una prueba al final de todo el proceso.

ANÁLISIS DE DATOS

En la primera sesión con los estudiantes se realizó una discusión (15 min) de los dos problemas sobre los ejercicios de patrones planteados en la prueba diagnóstica con el propósito de explorar las consideraciones que ellos hicieron para resolverlos.

ANÁLISIS DEL PRIMER PROBLEMA PROPUESTO

El problema consistió en la secuencia de figuras siguientes:



Cuyo objetivo fue que los estudiantes pudiesen descubrir el patrón para encontrar la cantidad de puntos en cada figura y poder predecir otras, encontrando primero el número de puntos de la fig. 4, luego de la fig. 5 y fig. 11, finalmente, observar si eran capaces de elaborar una expresión para saber cuántos puntos tenía una figura cualquiera que pertenece a dicha secuencia.

La primera interrogante: ¿Cuántos puntos tiene la fig. 4?, fue contestada correctamente por todos los estudiantes por lo que se puede decir que no tuvieron ningún tipo de dificultad para encontrar cuantos puntos tenía dicha figura, la estrategia que utilizaron fue sumar 5 al número de puntos de la figura anterior (habiendo descubierto previamente que la cantidad de puntos aumentaba en 5).

Resultados a la segunda interrogante: ¿Cuántos puntos tiene la fig. 5?

La mayoría de los estudiantes (10) contestaron correctamente a la segunda interrogante. De los tres estudiantes que no contestaron correctamente dos de ellos comentaron haber tenido el error al momento de realizar la suma. Y el otro estudiante dijo no haber encontrado el patrón y decidió colocar un número cualquiera.

Resultados a la tercera interrogante: ¿Cuántos puntos tiene la fig. 11?

En esta la mayoría de los estudiantes (8), encontró la respuesta correcta a esta interrogante, de los cinco estudiantes que no contestaron correctamente dos cometieron el error por haberle sumado cinco al resultado equivocado que obtuvieron en la segunda pregunta; dos estudiantes cometieron el error al sumar y el otro dijo haber dado una respuesta al azar.

Como lo vemos en las imágenes siguientes:

Figura 1: Error al sumar

¿Cuántos puntos tiene la figura número 4?

Tiene 19 Figuras

¿Y la figura número 5?

Tiene 25 Figuras

¿Cuántos puntos tiene la figura número 11?

Tiene 55 Figuras

Figura 2: Respuesta al azar

¿Cuántos puntos tiene la figura número 4?

Tiene 19 puntos

¿Y la figura número 5?

Tiene 29 puntos

¿Cuántos puntos tiene la figura número 11?

23

En general, los estudiantes no presentaron dificultades para llegar a la respuesta correcta, la mayoría identificó el patrón y logró encontrar el resultado adecuado. Aquellos que fallaron en el intento cometieron el error al calcular la suma.

Resultados a la última interrogante: Encuentre una fórmula para saber cuántos puntos tiene cualquier figura de la sucesión.

En esta solamente dos estudiantes lograron encontrar la relación entre número de figura y cantidad de puntos, otro hizo un intento de llegar a ella, los demás no dejaron muestra de haberlo intentado.

Podemos observar el trabajo que realizaron los estudiantes en las siguientes imágenes:

Figura 3: Intentó generalizar

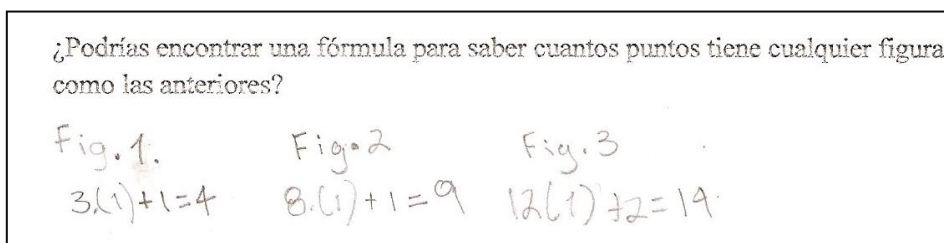


Figura 4: Encontró la generalización, pero no su expresión algebraica

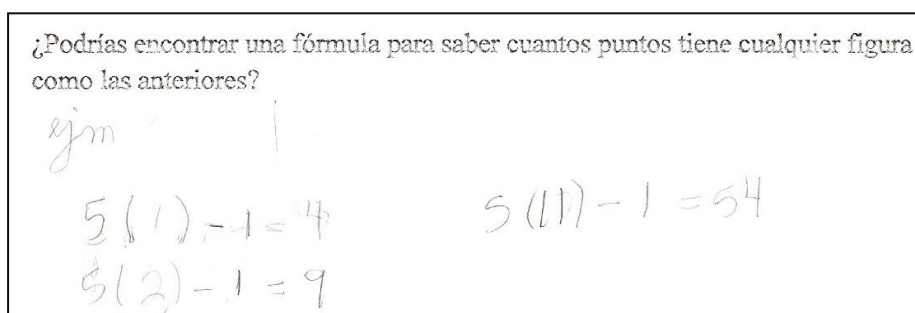
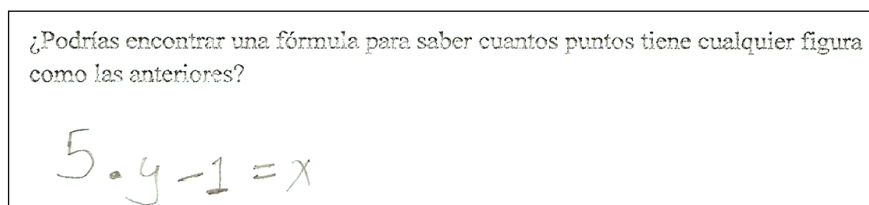


Figura 5: Logró generalizar



De esta primera sesión podemos concluir que efectivamente los estudiantes hacen uso de estrategias que ya conocen, al identificar el patrón, la mayoría optó por sumar cinco al número de puntos de la figura anterior y algunos dibujaron para constatar su conjetura. Se puede decir que los errores cometidos no fueron necesariamente dificultades en la comprensión del problema sino en los cálculos que realizaron. Luego se realizaron dos sesiones más, teniendo como objetivo principal, que los estudiantes consiguieran la generalización, en las cuales se obtuvieron los siguientes resultados:

En la segunda sesión, los estudiantes trabajaron en cuatro equipos, de los cuales tres consiguieron llegar a la generalización. Por lo anterior notamos que los resultados mejoraron cuando los estudiantes trabajaron en equipos.

En la tercera sesión, los estudiantes trabajaron individualmente solo cinco estudiantes llegaron a la generalización con éxito. Aquellos que no lo lograron presentaron dificultades para plantearla, es decir, no fueron capaces de llevar adelante cambios de registro, dicho de otra manera, permanecieron con el planteamiento puramente aritmético y no lograron identificar uno más complejo como una expresión algebraica que reuniera los requisitos que dieran solución al problema. Además, esta dificultad no es exactamente ausencia de conocimiento, sino como un conocimiento previo que no admite generalización a un nuevo ámbito y por ende induce a error.

Después de un proceso de familiarización de los estudiantes con las sucesiones de números y figuras, se decidió evaluar el progreso de estos, mediante una prueba. En dicha prueba se plantearon dos problemas, en los que los alumnos deberían utilizar las habilidades adquiridas en la resolución de los problemas propuestos en cada una de las sesiones. La generalización del primero era similar a los de la primera y segunda sesión, y el segundo estaba relacionado con el problema de la tercera sesión, con lo que se indujo a los estudiantes a hacer uso de las estrategias empleadas durante todo el proceso.

ANÁLISIS DEL PRIMER PROBLEMA PROPUESTO EN LA PRUEBA FINAL

El primer problema planteado fue el siguiente. Sabemos que los números impares son: 1, 3, 5, 7, 9,... y se les pidió a los estudiantes la generalización de los números impares y encontrar los siguientes dos números utilizando dicha generalización. Hubo cinco estudiantes que llegaron a la generalización sin ninguna dificultad. Como se muestra en la siguiente figura:

Figura 6 (Logra generalización)

1. Sabemos que los números impares son: 1, 3, 5, 7, 9,... Encuentra su generalización.

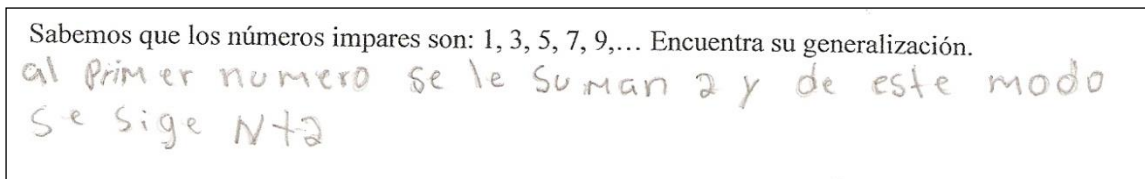
$$2(n) - 1 = y$$

$$3 \times 2 - 1 = 5$$

$$4 \times 2 - 1 = 7$$

Los ocho restantes fallaron en plantear la generalización, teniendo dificultades para descubrir la expresión algebraica correcta, descubrieron cierto patrón pero de manera recursiva. Como se muestra en las siguientes figuras.

Figura 7 (Descubre el patrón pero no consigue generalizar)



CONSIDERACIONES FINALES

En resumen puede decirse que el aprendizaje del álgebra es más efectivo cuando se realizan actividades adecuadas para que los estudiantes asimilen mejor el lenguaje algebraico. Vale la pena mencionar que los problemas planteados en las hojas de trabajo y en la prueba final, al igual que las discusiones realizadas con los estudiantes han servido como guía en el desarrollo de sus habilidades en matemáticas. Es importante señalar que el profesor juega un papel fundamental en la creación de oportunidades en las que los estudiantes se enfrenten con situaciones en las que deben conjeturar, comparar y hacer uso de diferentes representaciones, es decir, deben ser capaces de utilizar tanto el lenguaje aritmético como el algebraico.

AGRADECIMIENTO

Pela ajuda económica à Fundação de Apoio ao Desenvolvimento do Ensino, Ciência e Tecnologia do Estado de Mato Grosso do Sul (FUNDECT), por médio do programa de Mestrado em Educação Científica e Matemática da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul (UEMS).

REFERENCIAS

CANALES, M., CASTRO, E., CASTRO, E., INVESTIGACION EN MATEMATICA EDUCATIVA XI. **Patrones, generalización y estrategias intuitivas de estudiantes de 3° y 4° de las ESO en el problema de las baldosas**, 284-294. Universidad de Zaragoza, 2007, Consultada el 22/marzo/2009, Disponible en: <http://www.colciencias.gov.co/portaicol/downloads/archivosContenido/66.doc>

CARDONA, M. **Desarrollo del pensamiento algebraico en alumnos de octavo grado del CIIE a través de la resolución de problemas** (Tesis de Maestría, UPNFM), 2007.

CASALLAS, L, ESTRELLA, C. **Actividades que Potencian la Interpretación de la Letra como Número Generalizado: Análisis de sus efectos en la clase de álgebra**. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia, 2001.

CNB, **Diseño Curricular Nacional para la Educación Básica**. Propuesta. Secretaria de Educación. Honduras, 2005.

GLOSARIO DE TÉRMINOS MATEMÁTICOS, consultado el 23 de julio del 2009 en http://www.miportal.edu.sv/NR/rdonlyres/B079590C-AF2A-4053-B3F7-ABC45A66D61D/0/14_METODOLOGIA_5_.pdf

NCTM, **Principles and Standards for School Mathematics**. 2000.

ROMERO R, FERNÁNDEZ L, LOYDOVER M, CHAPARRO E, MEZQUIDA H, CIPAMOCHA J. **Iniciación al Álgebra a través de actividades funcionales y de Generalización**, Colombia, 2007.

S. A. E. M. **Principios y Estandares para la Educación Matemática**. Sevilla: servicios de publicaciones de la S.A.E.M. 2000.

URSINI, S., **Creación de un potencial para trabajar la noción de variable**. México: grupo editorial Iberoamérica. pág.: 423-440, 1996.

VILANOVA, S. et al, **La resolución de problemas en la educación matemática**. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 16(2), pp. 502-509, 2003. Consultado el 17/marzo/2009, disponible en: <http://www.rieoei.org/deloslectores/203Vilanova.PDF>