



II EPTEM

Encontro Paranaense de Tecnologia na Educação Matemática
UTFPR de Curitiba (Centro), 18 a 22 de outubro de 2021

EXPLORAÇÃO DE CONCEITOS DE FUNÇÕES LINEARES POR MEIO DO CONTEXTO DA CINEMÁTICA E DA UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA

Adriana Ikegame Caldeira

Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR
adrianacaldeira@alunos.utfpr.edu.br

Giseli Sanguino

Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR
giselisanguino@alunos.utfpr.edu.br

Mateus Felipes

Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR
felipesmateus02@gmail.com

Marcele Tavares Mendes

Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR
marceletavares@utfpr.edu.br

Resumo

Este trabalho apresenta uma tarefa que utiliza o GeoGebra enquanto recurso tecnológico e o contexto da Cinemática para uma exploração de conceitos relacionados a funções lineares, a saber, representação gráfica, coeficiente angular (velocidade) e coeficiente linear (ponto de partida da movimentação do carro). A exploração da tarefa se apresenta por meio de proposições de diálogos, característicos de uma Trajetória de Ensino e de Aprendizagem, com uma visão de possíveis processos de aprendizagem; indicações didáticas para um ensino da matemática que utiliza contextos da física – a cinemática. Trata-se de um recorte de uma pesquisa de mestrado em desenvolvimento no contexto de um Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campus Londrina e Cornélio Procópio. A intenção é que, como nesse texto, a partir dessa pesquisa seja gerado um produto educacional com um conjunto de tarefas que potencializam práticas de ensino, por meio do reconhecimento de que fenômenos de outras áreas disciplinares podem ser tomados enquanto contexto para exploração de conceitos matemáticos e das possibilidades de aprendizagem geradas ao utilizar softwares que combinam de forma dinâmica a geometria e álgebra.

Palavras-chave: Educação Matemática. Funções Lineares. Tarefas. GeoGebra.

Introdução

O surgimento das tecnologias e o acesso aos ambientes dinâmicos têm favorecido e tornado mais acessível à exploração de objetos matemáticos. Essa possibilidade potencializa a construção e elaboração dos conceitos pelos alunos, por terem a possibilidade de manipular



objetos matemáticos até então não acessíveis por meio de lidar com tarefas que utilizam de recursos tecnológicos dinâmicos.

A experiência e a construção de significados matemáticos de um aluno no contexto escolar estão intimamente associados às tarefas que a ele são dadas e ao papel que ele assume em sua sala de aula. Pressupondo um contexto escolar em que o aluno é protagonista, corresponsável por sua aprendizagem e que as experiências das aulas de matemática buscam por um letramento matemático¹, o planejamento das atividades torna-se peça chave de todo o processo de ensino.

Nessa direção, com esse trabalho, buscou, por meio de uma tarefa matemática que faz parte de um produto educacional em desenvolvimento, refletir a respeito: do potencial de uma Trajetória de Ensino e de Aprendizagem para o planejamento, organização e execução de uma aula de matemática; do proveito que pode ser tirado da tecnologia no desenvolvimento do pensamento matemático e do letramento matemático; da possibilidade de contextos da Cinemática serem mote para discussão de conceitos de Funções Lineares.

Alguns apontamentos

Um ensino planejado em que a base são tarefas que utilizam recursos como o software GeoGebra, planilhas eletrônicas permite, conforme apontam Borba, Silva e Gadanidis (2015), que os alunos se envolvam e aprendam matemática por meio da experimentação com tecnologia. Segundo esses autores, a experimentação com tecnologia em aulas de matemática tem potencial para um processo de aprendizagem com características e ações apresentadas no Quadro 1.

¹ a capacidade do indivíduo de formular, aplicar e interpretar a matemática em diferentes contextos, o que inclui o raciocínio matemático e a aplicação de conceitos, procedimentos, ferramentas e fatos matemáticos para descrever, explicar e prever fenômenos. Além disso, o letramento em matemática ajuda os indivíduos a reconhecer a importância da matemática no mundo, e agir de maneira consciente ao ponderar e tomar decisões necessárias a todos os cidadãos construtivos, engajados e reflexivos (BRASIL, 2013, p. 18).

**Quadro 1** – Características e ações da Experimentação com Tecnologia

Criar e simular modelos matemáticos.
Gerar conjecturas matemáticas.
Explorar de diversificadas formas de resolução.
Manipular dinâmica de objetos construídos.
Realizar testes de conjecturas usando um grande número de exemplos, modificando representação de objetos, simulando componentes de construções, etc.
Convencer-se sobre a veracidade de conjecturas.
Elaborar novos tipos de problemas e construções matemáticas.
Criar e conectar diferentes (e múltiplos) tipos de representações de objetos matemáticos.
Explorar o caráter visual, dinâmico e manipulativo de objetos matemáticos.
Incentivar à combinação de raciocínio intuitivo, indutivo ou dedutivo, que podem contribuir ao desenvolvimento do raciocínio dedutivo.
Criar de atividades matemáticas “abertas controladas”, ou seja, com direcionalidade ao seu objetivo.
Ensinar e aprender matemática de forma alternativa.
Compreender conceitos.
Conhecer novas dinâmicas, formas de conectividade e relação de poder em sala de aula.
Envolver-se com um novo tipo de linguagem (informática) na comunicação matemática, além da escrita.
Criar diferentes tipos de símbolos e notações matemáticas.
Aprofundar em variados níveis de rigor matemático.

Fonte: Baseado em Borba, Silva e Gadanidis (2015).

Para Mendes, Trevisan e Elias (2018), a realização de boas tarefas vem sendo um desafio para muitos professores, principalmente associados à noção de experimentação com tecnologia, que aumentam as possibilidades de aprendizagem dos alunos. Esse desafio é um dos motes da pesquisa de mestrado em andamento e a tarefa apresentada neste texto é um recorte do Produto Educacional em desenvolvimento.

Ainda, além de professores utilizarem meios inovadores da tecnologia educacional, reconhecemos necessário e pertinente refletir possíveis encaminhamentos pedagógicos, soluções e conjecturas que poderão se apresentar no contexto de uma sala de aula. O caminho escolhido para essa reflexão é o desenvolvimento de uma trajetória de Ensino e de Aprendizagem (TEA). Uma TEA é uma descrição que entrelaça elementos de uma trajetória de aprendizagem na qual apresenta um(a): visão do processo de aprendizagem dos alunos; trajetória de ensino com indicações didáticas; delineamento do conteúdo curricular (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000, p. 28).



Uma tarefa em um TEA

A Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017), direcionada para a área de Matemática e suas tecnologias do Ensino Médio, propõe que as ações didáticas atendam demandas para a consolidação, ampliação e aprofundamentos essenciais de conhecimentos vistos no Ensino Fundamental. O texto também sugere que os conteúdos explorados em sala de aula sejam apresentados de modo a se relacionarem, possibilitando ao aluno uma formação integrada e ampla a respeito de sua perspectiva matemática (BRASIL, 2017).

Nessa direção, apresentamos uma tarefa contextualizada baseada em um fenômeno físico da Cinemática, na qual exploramos possibilidades de diálogos em sala de aula, reconhecendo que, conforme Van Den Heuvel-Panhuizen (2002), os professores precisam ser capazes de prever e retratar as principais ações e competências desenvolvidas em conexões com outras bases nos objetivos desejados, ressaltando ainda, que essa ação é uma condição necessária e fundamental para o professor orientar seus alunos.

No enunciado da tarefa tem-se a utilização de um Objeto de Aprendizagem² desenvolvido no Software Geogebra que simula a movimentação de dois carros que percorrem uma mesma trajetória a uma velocidade constante, um dos carros está a x metros a frente do outro. Na área de ensino da Física esse contexto faz parte da discussão de Movimento Retilíneo Uniforme e em seu estudo são envolvidas grandezas escalares e vetoriais como: velocidade, distância, direção, sentido entre outras. Já no ensino de Matemática, por meio da tarefa proposta, o professor tem a oportunidade de trabalhar o conceito de funções lineares de forma contextualizada e, com isso, os conceitos e estruturas matemáticas serão desenvolvidos enquanto ferramentas para organizar fenômenos do mundo físico, social e mental - essa concepção de matemática enquanto ferramenta é apresentada por Freudenthal (1991).

A elaboração de trajetórias de ensino e de aprendizagem de matemática por si já permite ao professor “pensar em diferentes resoluções que os alunos podem apresentar quando do

² Recurso digital como, por exemplo: textos, animação, vídeos, imagens, aplicações, páginas Web em combinação que destinam-se a apoiar o aluno no processo de aprendizagem. São recursos digitais modulares, usados para apoiar a aprendizagem presencial e à distância.



trabalho com uma tarefa, que eles podem entender algo em níveis diferentes” (SANTOS, 2014, p. 37). Além disso, permite planejar como “poderá auxiliar os alunos na relação entre as suas estratégias informais de resolução, relacionadas a uma “realidade”, e um conhecimento matemático mais formal” (SANTOS, 2014, p. 37).

Enquadramento da Tarefa

A tarefa apresentada faz parte de um conjunto de tarefas em elaboração no contexto de uma pesquisa qualitativa, de cunho interpretativo em andamento que tem por objetivo elaborar, aplicar e analisar tarefas que lidam com fenômenos de outras áreas disciplinares e que possam ser tomados enquanto contexto para exploração de conceitos matemáticos de forma combinada com a utilização de softwares dinâmicos. De forma específica, neste trabalho, buscou-se explorar e analisar uma tarefa que tem associado um objeto de aprendizagem interdisciplinar (Matemática e Física) por meio da proposição de diálogos. No Quadro 2 é apresentada informações curriculares da tarefa baseada na BNCC.

Quadro 2 - Informações Curriculares

Conteúdo	Objetivo	Competência	Habilidade
Funções Lineares	Identificar um modelo para que possam gerar respostas adequadas. Analisar os fundamentos e propriedades de modelos existentes. Considerar diferentes tipos de problemas, incluindo a construção e o reconhecimento de modelos de conteúdos a serem aplicados.	Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
			(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º grau, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
			(EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, distância e tempo).

Fonte: Adaptada da [BNCC](#) (BRASIL, 2017).

Nesta proposta, o professor disponibiliza aos alunos o acesso a tarefa a partir de um formulário no ambiente virtual Google Forms (link <https://forms.gle/WC94JrQ32PSwuxHZ9>).

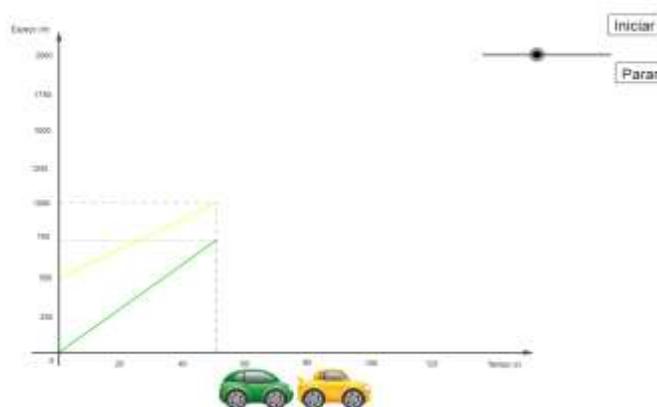


II EPTEM

Encontro Paranaense de Tecnologia na Educação Matemática
UTFPR de Curitiba (Centro), 18 a 22 de outubro de 2021

Ao aluno acessar esse formulário é indicado à interação com o objeto de aprendizagem disponível em <https://www.geogebra.org/m/vxkcnez>.

Figura 1: Print da tela do Objeto de Aprendizagem



Fonte: arquivo dos autores.

Os alunos terão oportunidade de responder às questões do formulário de forma individual, sem intervenção do professor. O conjunto de respostas servirá de ponto de partida para o professor planejar encaminhamentos, questionamentos com os alunos em um momento síncrono (na forma presencial ou remota).

A tarefa e considerações para uma TEA

O professor ao escolher ou elaborar uma tarefa tem que ter em seu planejamento como será organizado o espaço pedagógico. No planejamento o professor elabora perguntas pertinentes às dúvidas que foram percebidas na análise das respostas dos alunos e assim inicia a aula já com um roteiro em mente para direcionar os alunos na formulação do conceito matemático desejado - representação gráfica de funções lineares, coeficiente angular e coeficiente linear.

Segue um possível diálogo entre professores (P) e alunos (An, n um número entre 1 à 4). Nesse diálogo o professor tem a intenção de discutir as grandezas que podem ser levantadas a partir da interação com o objeto de aprendizagem.

P. Como vocês descrevem a situação depois de iniciar a animação e analisá-la?



A1. São dois carros andando na mesma direção, e em um determinado momento os dois se encontram.

P. Como você explica os dois carros se encontrarem?

A2. Um carro está mais acelerado que o outro.

A1. Os dois carros possuem velocidades diferentes.

A3. Porque um está com velocidade maior que o outro.

P. Vocês disseram que a velocidade e aceleração dos carros estão diferentes. Velocidade e aceleração são a mesma coisa? são iguais?

A2. Acho que sim.

A3. Mas quando acelera é que a velocidade acontece, não é professora?

P. Com essa resposta de A3, podemos então dizer que a velocidade é o resultado da aceleração? Vamos refletir sobre isso voltando para o objeto de aprendizagem.

A partir das grandezas “velocidade e aceleração” levantadas nesse diálogo o professor terá a oportunidade de provocar questionamentos a respeito da relação de dependência entre as grandezas (velocidade, distância e tempo), a aceleração pode ser explorada, mas não será foco nesta proposição de diálogo.

P. Movimentando o cursor na animação vocês conseguem perceber em qual momento (tempo) o carro B ultrapassa o carro A?

A1. Em 100 minutos.

A3. Mas o gráfico está em segundos.

A2. Ah, verdade, então será 100 segundos.

A4. Ah, mas e o outro lado que tem o 1500? Não tem nada haver?

A2. Mas a professora quer tempo e não distância.

A4. Ah, é verdade!

Apesar de ainda não haver uma relação de dependência das grandezas explicitamente nas falas dos alunos, o professor tem nessas respostas indícios de que reconhecem as grandezas em cada um dos eixos, podendo seguir conforme diálogo:

P. Retomando a questão do formulário, os carros A e B estão em Movimento Retilíneo Uniforme, na mesma direção e sentido, tentem descrever os elementos que podem ser observados ao movimentar o cursor.

A1. Cada carro constrói uma reta ao se movimentar.

A4. Verdade, elas se encontram em um momento.

A2. Mas por que será que elas se encontram?

A3. Deve ser quando os carros estão juntos.

A1. Isso mesmo, porque no tempo 100 s é que as retas se juntam.



P. O que pode ser dito a respeito da distância percorrida por cada carro em relação ao tempo?

A1. Quanto mais passa o tempo, maior é a distância percorrida de cada carro.

P. Pensando nisso, o comportamento de cada reta no gráfico é crescente ou decrescente?

O que justifica o comportamento escolhido?

A3. Crescente, pois a reta vai aumentando.

A2. Verdade, as duas retas são crescentes.

P. Essas duas retas descrevem a movimentação de dois carros, certo? E vocês disseram que elas são crescentes, certo? Então como podem esses carros se encontrarem?

A3. Aí voltamos na velocidade professora! Elas são diferentes.

P. Isso, então, com base no gráfico, em qual ponto pode-se afirmar que eles se encontram? E o que esse encontro representa.

A1. Quando no gráfico marcar 100 s e 1500 m

A2. Ah, é verdade!

P. E o que esse ponto representa na matemática e na física? Representam a mesma coisa?

A3. O ponto representa a mesma coisa uai!

Nesse diálogo o professor tem a oportunidade de recolher informações a acerca do entendimento que os alunos elaboraram quanto ao posicionamento das retas e da relação que existe entre o tempo e a distância. A partir disso, o professor pode com eles formular a generalização existente utilizando uma lei de formação de uma função, e de explorar as interpretações conceituais da física e da matemática no modelo construído. Primeiramente, os alunos precisam determinar a velocidade dos carros e reconhecer que o carro amarelo inicia seu trajeto 500 metros a frente do outro carro.

P. Sabendo que em um momento os dois carros se encontram e percorre a mesma distância qual seria a diferença entre um e outro?

A3. Um começa no 0 e outro em 500.

A4. O que isso tem haver, com a resposta final?

A2. Tem haver. Pois, um começou na frente, 500 metros na frente.

A3. Mas depois o que ficou atrás ultrapassa porque ele está mais rápido.

P. Então quer dizer que a velocidade implica no comportamento do gráfico?

A2. Sim.

A3. Sim professora, porque se não o carro verde não ultrapassaria o amarelo, ele só conseguiu porque está mais rápido.



Com intervenções que explorem variações de percurso e tempo, o professor orienta seus alunos a descobrir que o carro mais lento e que parte já 500 metros a frente tem a velocidade de 10m/s, já o carro verde possui velocidade de 15m/s. Essa informação é necessária para o processo de generalização e exploração da tarefa. A partir da conquista dessa observação, o professor pode orientar seus alunos a formalizar a função (distância x tempo). Como mostra o diálogo que segue:

P. Pessoal, mais uma pergunta: Conhecendo essas informações então pode ser definida a distância percorrida pelos carros em qualquer tempo?

A1. Dá pra saber sim, é só ir somando...

A4. Sim! De 10 em 10 e o outro de 15 em 15.

P. Isso que vocês estão pensando, iniciei o tempo de contagem, passou 1 segundo o carro andou 10 metros, passou mais 1 segundo o carro andou mais 10 metros, e assim sucessivamente? Seria isso?

A2. Isso.

P. Certo, então vamos pensar em algumas situações. Supondo que tenha passado 5 segundos do tempo?

A3. Vai ser 50 metros para o carro amarelo e para o verde... vai ter que fazer 15 vezes 5.

A2. 15×5 é 75, fiz aqui.

A3. Então é isso, a distância do verde será 75 metros.

P. Isso mesmo! Podemos definir e prever quais serão as distâncias dos carros depois de passado determinado tempo, inclusive, podemos escrever uma função geral que nos apresenta a distância para qualquer tempo que for definido.

Para ficar mais fácil vamos representar as grandezas que vocês perceberam no objeto de aprendizagem. Quais são?

A1. Velocidade, professora.

P. Tem mais alguma?

A2. A que estão no gráfico, professora?

P. Sim.

A3. Distância e tempo.

P. Exatamente, vamos chamar a distância de D , a velocidade de v e o tempo de t , certo? Como foi mesmo que vocês apresentaram a distância?

A4. Nós encontramos a distância multiplicando pelo tempo.

P. Vou repetir o que vocês estão falando! A distância é igual à multiplicação do tempo pela velocidade? Isso?

A1. Isso!

P. Então agora vou representar isso que vocês falaram através de uma função, $D = vt$. Está certo?

A2. É mais nós multiplicamos por 10 e por 15



A3. São as velocidades dos carros. Vai ser duas funções $D = 10t$ e $D = 15t$, cada uma de um carro.

A partir do momento em que os alunos foram capazes de formalizar a relação de dependência entre a distância e o tempo para o cálculo da velocidade a professora formaliza a função do tipo $D = vt$, em que D é a distância percorrida, v é a velocidade e t é o tempo.

Com isso finaliza-se com a ideia de que os dois carros trafegavam na mesma reta e na mesma direção em velocidades constantes, porém diferentes, na qual o carro amarelo mantinha sua velocidade em 15 m/s e a 500 metros a frente do verde, e o verde mantinha sua velocidade a 10 m/s, obtendo as relações $D = 10t + 500$ e $D = 15t$, ocorrendo intersecção após um minuto e 40 segundos de percurso. Além dessa leitura física, o professor pode explorar os termos coeficientes angular - quanto maior o coeficiente angular positivo, maior a taxa de crescimento; o significado do coeficiente linear - valor da ordenada do ponto que intercepta o eixo-y, entre outros.

Ao concluir essa tarefa o aluno constrói ligações entre seus conhecimentos e os conhecimentos elaborados em conjunto com seus colegas e professor para lidar com a tarefa. Nesse processo torna-se protagonista de sua aprendizagem, que acontece em um contexto interdisciplinar e significativo, o professor assume seu papel de questionador e mediador, direcionando o diálogo para o caminho em que ele deseja que o aluno percorra até a formalização do conteúdo proposto.

Considerações Finais

Apesar de ser uma proposição de diálogo, reconhecemos que a apresentação do conteúdo de forma contextualizada e interdisciplinar por meio de tarefas é um caminho que é capaz de instigar os alunos a construir um aprendizado significativo. Nesse sentido, a trajetória de ensino e de aprendizagem assume um papel relevante para o professor que ao planejar sua prática docente se prepara para diferentes possibilidades de abordagens vindas dos alunos em sala de aula, otimizando o tempo de duração da aula, de modo que consiga ter o início, meio e fim da discussão proposta em tempo hábil.



Ressalta-se que apesar de diálogos terem buscado explorar conceitos associados à tarefa, muitos outros caminhos e possibilidades poderiam ter sido tomados, evidenciado o potencial da tarefa para a organização e exploração de aulas de matemática que utilizam o fenômeno cinemática enquanto ponto de partida para exploração e elaboração de uma matemática interessada em ser ferramenta para lidar com as mais distintas situações.

O objeto de aprendizagem elaborado proposto, conforme explorado nas proposições dos diálogos, possui potencial para o professor organizar um ambiente de sala de aula em que permite aos alunos desenvolver competências e habilidades apresentadas no Quadro 2, um contexto em que os alunos interpretam problemas a partir dos fenômenos da física, realiza adaptações das soluções a partir do diálogo com o professor e com os colegas, favorecendo uma aula de matemática em que os alunos realizam argumentações na direção de uma sistematização do assunto/conhecimento curricular almejado pelo professor. Além disso, conforme definido no Quadro 1, podemos ver que a utilização da tecnologia em aulas de matemática aumentam as possibilidades didáticas a serem exploradas, em especial as ações didáticas ligadas à experimentação matemática, que se tornam subsídios para engajamentos educacionais e discussões argumentativas, fortalecendo a aprendizagem e a autonomia do estudante.

Referências

- BORBA, M. C.; SILVA, R. S. R.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática. Sala de aula e internet em movimento.** Belo Horizonte: Autêntica, 2015.
- FREUDENTHAL, Hans. **Revisiting Mathematics Education.** Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.
- MENDES, M.T., TREVISAN, A.L., ELIAS, H.R., **A utilização de TDIC em tarefas de avaliação: uma possibilidade para o ensino de cálculo diferencial e integral. Debates em Educação,** Maceió, v. 10, n. 22, p140-163. Set/dez. 2018.
- SANTOS, E. R. **Análise da produção escrita em matemática: de estratégia de avaliação a estratégia de ensino.** 2014. 156f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014



II EPTEM

Encontro Paranaense de Tecnologia na Educação Matemática
UTFPR de Curitiba (Centro), 18 a 22 de outubro de 2021

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. V. D. **Mathematics education in the Netherlands: a guider tour.** In: Freudenthal Institute. Utrecht: Utrecht University, 2000.