CONSTRUÇÃO VIA O *SOFTWARE* GEOGEBRA DO FRACTAL TRIÂNGULO DE SIERPINSKI: UMA APLICAÇÃO PARA AS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

Bruna Luana Züge
Universidade Federal de Santa Maria
Brunazuge28@gmail.com

Carmen Vieira Mathias
Universidade Federal de Santa Maria
carmenmathias@gmail.com

Resumo
Este trabalho é um recorte de uma pesquisa que está em andamento, onde o objetivo é fazer uso de tecnologias da informação e comunicação (TIC) no processo ensino aprendizagem. A ideia é trabalhar com o *software* GeoGebra como ferramenta de auxilio no desenvolvimento de atividades a serem desenvolvidas com alunos do ensino básico e ingressantes no curso de licenciatura em matemática. Por meio de observações de como o estudo do tópico Transformações Geométricas é sugerido em documentos como BNCC e PCN, escolheu-se uma maneira dinâmica de entender tais conceitos e determinar uma aplicação para o conteúdo. Para isso, neste trabalho é detalhada a construção de interações do Fractal Triângulo de Sierpinski utilizando ferramentas como sequencias e homotetias, presentes no *software* GeoGebra.

Palavras-chave: GeoGebra. Fractais. Transformações Geométricas.

Introdução

Pensando no ensino do tópico Transformações Geométricas tanto no Ensino Superior quanto na Educação Básica, esse geralmente é visto de forma estática sem muitas aplicações. Documentos como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), apresentam conceitos relacionados aos conteúdos.

Para o Ensino Fundamental, anos iniciais, a BNCC aponta que por exemplo, o ensino de simetria deve ser introduzido por meio da manipulação de representações de figuras geométricas planas em quadriculados ou no plano cartesiano. Já para os anos finais, temos no que se refere a unidade temática Geometria, o estudo de transformações, como pode ser observado no seguinte trecho.

> “Em relação ao pensamento geométrico, eles desenvolvem habilidades para interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no

> plano cartesiano, identificar transformações isométricas e produzir ampliações e reduções de figuras. Além disso, são solicitados a formular e resolver problemas em contextos diversos, aplicando os conceitos de congruência e semelhança. (BRASIL, 2017, p.517)."

Com relação ao Ensino Médio, a BNCC apresenta competências como meio para tratar dos conteúdos, na Habilidade Específica 5, referente a Competência 1. Ela sugere que o estudo envolvendo as Transformações Geométricas pode ser trabalhado do primeiro ao terceiro ano do Ensino Médio,

> "Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para analisar diferentes produções humanas como construções civis, obras de arte, entre outras. (BRASIL, 2017, p. 525)."

Tanto para o Ensino Fundamental como o Ensino Médio, na BNCC, é sugerido o uso de *softwares* para auxiliar no ensino dos conteúdos citados acima. Conforme os PCN, à medida que vamos nos integrando ao que se denomina uma sociedade da informação crescentemente globalizada, é importante que a educação se volte para o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, de trabalhar cooperativamente (BRASIL, 1999, p. 40). Levando em conta tais considerações, observamos que é possível que o ensino das Transformações Geométricas se torne, por meios tecnológicos e dinâmicos, um conteúdo atrativo e com significado para os alunos.

Assim, trabalho tem por objetivo apresentar uma aplicação para as Transformações Geométricas com o auxílio do *software* GeoGebra, no estudo da Geometria Fractal. Também pretende-se apresentar para a comunidade de professores de Matemática, possibilidades de utilização de conhecimentos matemáticos (geometria e aritmética) e computacionais (sobre o GeoGebra) para a produção de construções geométricas.

Sobre transformações

Como citado anteriormente, o estudo de Transformações Geométricas, está presente nos conteúdos sugeridos para o currículo da educação básica, e figura do tipo fractais, são exemplos de aplicações para esse tópico. Um fractal, segundo Salum (2005) é definido como uma figura que pode ser fragmentada em inúmeros pedaços, sendo que cada um desses pedaços é uma reprodução de toda a imagem (ou de uma imagem inteira).

Para a construção/reconstrução de uma imagem inteira Rosseaue Saint-Aubin (2015), enfatiza a importância de entender o que são transformações afins. Para exemplificar a construção de uma imagem inteira, os autores consideram a folha de uma samambaia. Ela é a união do talo, e três folhas de samambaia (Figura 1).

Cada uma dessas peças é a imagem da samambaia inteira sob uma transformação afim.

> “ [...] a transformação $T_{1,}$ que mapeia folha inteira menos os dois ramos de baixo,
> a transformação $T_{2,}$ que mapeia a folha inteira no ramo esquerdo baixo,
> a transformação T_3, que mapeia a folha inteira no ramo direito abaixo,
> a transformação $T_{4,}$ que mapeia a folha inteira na parte de baixo do talo. (ROUSSEAU e SAINT-AUBIN, 2015, p.66)”

Figura 1- Folha de uma samambaia.

Fonte: Ciência tube (2011).

Para tanto, Rousseau e Saint-Aubin (2015), apresenta a seguinte definição para transformação afim,

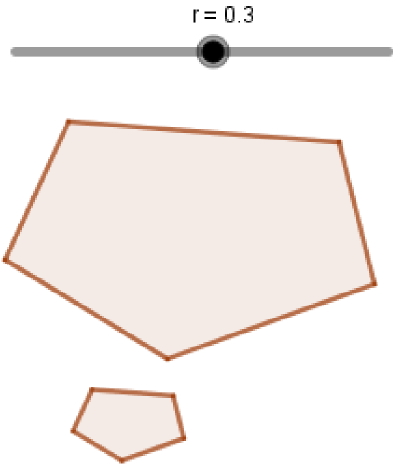
“Uma transformação afim $T: R^2 \to R^2$ é a composição de uma translação com uma transformação linear, podendo ser escrita como $T(x, y) = ax + by + e, cx + dy + f)$”.

Lembrando que é possível utilizar a notação matricial para representar transformações afins, temos que a transformação exemplificada acima pode ser escrita como

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$

A Figura 2 ilustra um exemplo de transformação afim simples, uma Homotetia de razão r: $T(x, y) = (rx, ry)$.

Figura 2- Homotetia de razão r.



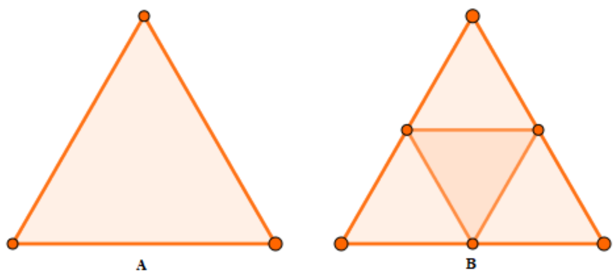
Fonte: Autores.

As representações de Fractais construídos utilizando transformação afim são chamados de atratores de sistemas iterados de funções. Rousseau e Saint-Aubin (2015), apresenta a seguinte definição para estes termos:

> "Uma transformação afim é uma contração afim se a imagem de qualquer segmento de reta é um segmento de reta mais curto."
>
> "Um sistema iterado de funções é um conjunto de contrações afins $\{T_1, \dots, T_m\}$."
>
> "O atrator de um sistema iterado de Funções $\{T_1, \dots, T_m\}$ será o único objeto geométrico A tal que $A = T_1(A) \cup \dots \cup T_m(A)$."

Para exemplificar, considere o triângulo (Figura 3A), ele pode ser constituido como a união de 4 triângulos menores congruentes, e não sobrepostos (Figura 3B).

Figura 3 – Exemplo de um sistema iterado.



Fonte: Autores.

"Mandelbrot define: Um Fractal é forma composta de partes que de algum modo são semelhantes" (ALVES, 2007), ou seja, essas formas geométricas possuem entre si a autossimilaridade, no qual consiste em obter réplicas menores da figura por meio de sua divisão ou ampliação.

Uma relação de transformação afim e fractais é dada em Eberson (2004), que apresenta atividades para construção de fractais utilizando sistemas iterados de funções em ambientes de geometria dinâmica. Visto que a Geometria Fractal

> "é uma área ainda em efervescente desenvolvimento, mais voltada ao crescimento do que ao aprofundamento e na qual novas descobertas e criações são anunciadas com novos enfoques e novas aplicações" (EBERSON, 2004, p. 15).

Ainda segundo o autor, a Geometria Fractal se utiliza de ferramentas simples da Álgebra Linear, tornando-se acessível à alunos do ensino básico, e o que torna esse estudo interessante é a maneira como essas ferramentas são aplicadas.

A escolha do *software* de matemática dinâmica, GeoGebra, é devido às diferentes possibilidades de representação que ele oferece. Isto transparece nas palavras de Gravina (2001),

> "[...] pode-se afirmar que a base de conhecimento dos ambientes de geometria dinâmica e a interface de trabalho por eles disponibilizada propiciam, com manipulação de *objetos concretos-abstratos* na tela do computador, a ascensão de patamar de conhecimento, de empírico para inserido em modelo teórico. (GRAVINA, 2001, p.88)."

Além do mais, com o uso de *software*s como o GeoGebra, é possível que o usuário explore e com isso construa suas próprias conclusões, verificando a validade das mesmas. Segundo Zulatto (2002) isso é viável devido aos seus recursos, como o mover, permitindo a visualização de diferentes formas da construção.

O *software* de matemática dinâmica GeoGebra além de gratuito é caracterizado por sua interface fácil de utilizar. Contudo, apresenta ferramentas de grande valor e permite o usuário visualização de diferentes registros de representação.

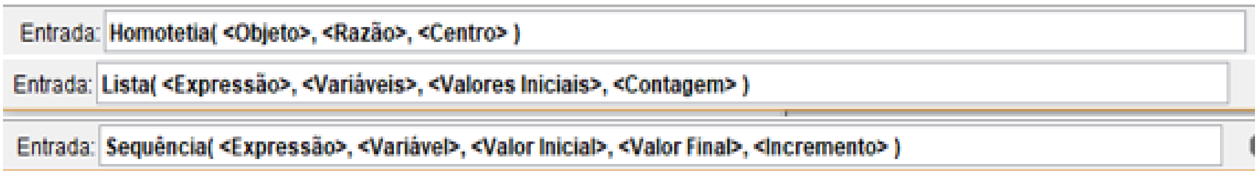
Metodologia

Este trabalho que, quanto os procedimentos técnicos, caracteriza-se como uma pesquisa bibliográfica, é proveniente de um projeto de pesquisa intitulado "Dificuldades, obstáculos e possibilidades no ensino e na aprendizagem de Matemática". Tal projeto tem por objetivos fazer uso de tecnologias da informação e comunicação (TIC) no ensino aprendizagem, ao trabalhar com o *software* GeoGebra como ferramenta de auxilio no desenvolvimento de atividades a serem desenvolvidas com os alunos do ensino básico e ingressantes no curso de licenciatura em matemática. Nesse caso em particular, escolheu-se os temas Transformações Geométricas e Fractais. Observamos que os resultados apresentados no presente artigo, são provenientes do projeto acima citado. A pesquisa que estamos realizando ainda não foi finalizada e o objetivo maior é utilizar os conceitos de Álgebra Linear e o *software* GeoGebra para construir a folha de uma samambaia, que é a representação de um Fractal que pode ser encontrado na natureza.

Desenvolvimento

Para exemplificar o uso das Transformações Geométricas na construção de representações de fractais, construiremos sete interações do Fractal conhecido como Triângulo de Sierpinski. Os comandos do *software* GeoGebra utilizados na representação do referido Fractal são: “Homotetia”, que é responsável por reduzir ou ampliar a imagem o quanto desejarmos; “Sequência” que possibilita criar um número infinito de objetos, a partir de parâmetros estabelecidos; “Lista”, com esta ferramenta podemos criar uma lista de objetos como pontos, segmentos de reta, polígonos entre outros. A apresentação desses comandos é ilustrado na Figura 4.

Figura 4 - Apresentação dos comandos no *software*.

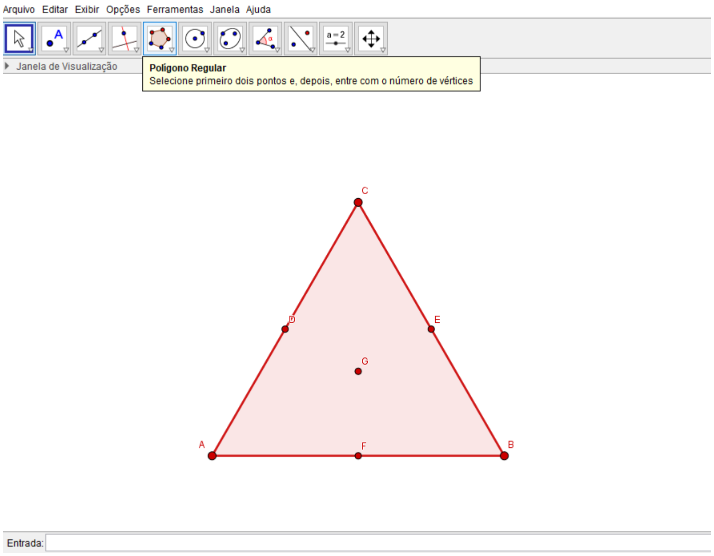


Fonte: Autores.

Na sequência, apresentaremos a rotina necessária para construir as cinco primeiras interações do Fractal Triângulo de Sierpinski.

Inicialmente, utilizando a ferramenta Polígono Regular, constrói-se um triângulo de base medindo 1 (escolhemos essa medida, mas poderia ser qualquer outra), na Janela de Visualização. Posteriormente marca-se os pontos médios referentes aos lados do triângulo e o ponto G, que é o baricentro do mesmo (Figura 5). Para marcar os pontos médios, uma sugestão é utilizar a ferramenta “Ponto Médio” e para determinar o baricentro, como se trata de um triângulo isósceles, usamos o comando “Centro de gravidade”.

Figura 5- Pontos médios referentes aos lados do triângulo

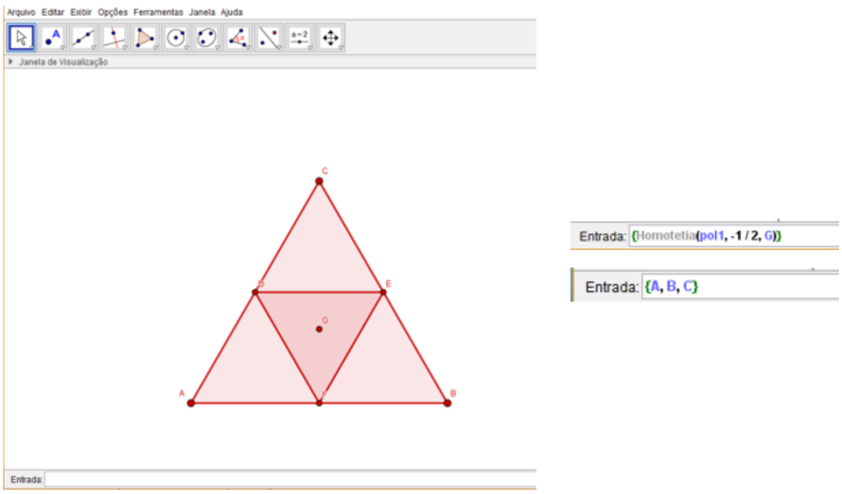


Fonte: Autores.

Na sequência, criamos listas, com o objetivo de aplicar as transformações necessárias. Para isso, no campo Entrada, digitamos os pontos A, B e C entre chaves, para criar uma lista referente aos vértices do triângulo. Nas propriedades da lista, a renomeamos como L_1.

A segunda lista, denominada L_2, tem a forma L_2 = {Homotetia (pol1, -1 / 2, G)}, que determina uma homotetia de razão $\frac{1}{2}$ em relação ao centro do primeiro triângulo construído. Observamos que essa é a razão escolhida, pois escolhemos o lado do triangulo como sendo 1.

Figura 6- Lista 1 e Lista 2.

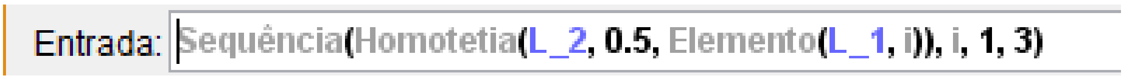


Fonte: Autores.

A próxima lista, da forma L_3= {Sequência [Expressão, Variável, Valor Inicial, Valor Final]}, possui o objetivo de construir homotetias de razão $\frac{1}{2}$ do segundo triângulo, em relação a cada vértice do primeiro triângulo.

Neste caso, em "Expressão" digitamos o comando "Homotetia [Objeto, Razão, Centro]", onde o objeto utilizado foi a segunda lista construída (L_2) e a razão é ½. No lugar de "Centro" digitamos o comando "Elemento [Lista, Posição do Elemento]". Em "Lista" colocamos L_1 e a posição como sendo *i*. Para terminar o comando "Sequência", temos a variável definida por *i*, valor inicial 1 e valor final 3 (Figura 7).

Figura 7- Comando lista L_3.



Fonte: Autores.

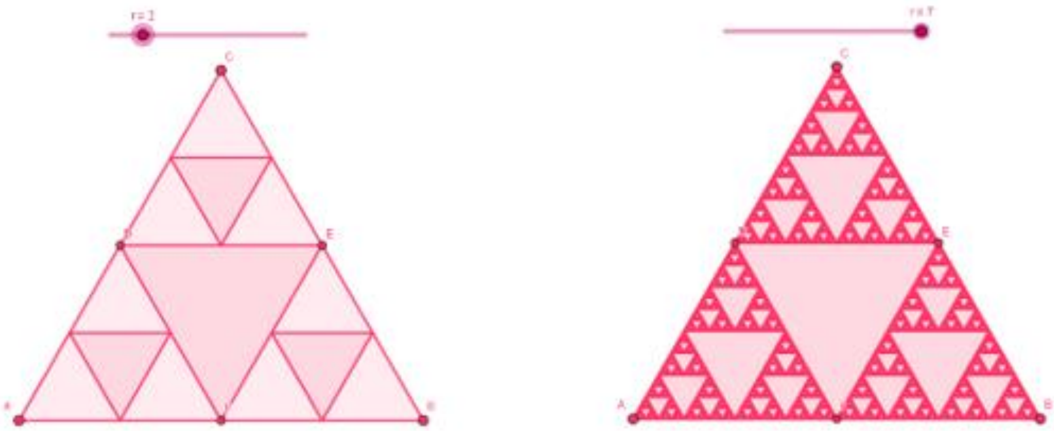
As próximas listas seguem a mesma ideia da lista L_3. O que varia em cada uma, é a lista colocada em "objeto". Observamos que "em objeto" sempre é colocada a lista anterior, conforme ilustra a Figura 8.

Figura 8- Comando listas.

Fonte: Autores.

Para encerrar a construção, criamos um "Controle Deslizante" com valor mínimo de 1 e valor máximo de 7 (número de iterações realizadas nesta construção). Com esta ferramenta é possível ver a construção da representação do Fractal de forma dinâmica, utilizando a ferramenta animar, como ilustra a Figura 9.

Figura 9- Modificação do Fractal conforme o valor do Controle Deslizante.



Fonte: Autores.

Utilizando o *software* e suas ferramentas observamos que a construção se tornou simples. Podemos observar também as Transformações Geométricas que estão presentes. Basicamente durante toda construção são utilizadas homotetias e translações das mesmas. Pode-se também construir representações de Fractais análogas à realizada, utilizando outras formas geométricas, como por exemplo quadrados ou outros polígonos regulares[1].

Conclusão

Pensando nas constantes evoluções das TIC temos cada vez mais recursos para auxiliar no processo de compreensão de conceitos matemáticos. Neste sentido, esse trabalho procurou apresentar aplicações para o tópico Transformações Geométricas, que são citdos nos PCN e na BNCC, por meio da construção de interações do Fractal Triângulo de Sierpinski, utilizando o *software* GeoGebra. Observamos que o *software*, por sua vez, possibilitou importante contribuição neste sentido, uma vez que por meio dele é possível o desenvolvimento de diversas construções dinâmicas e interativas que diversificam a maneira de olhar para o tópico Transformações Geométricas. Além disso, essa foi a primeira construção realizada. Na sequência pretendemos modelar a folha da samambaia (nosso fractal foco) por meio de curvas "Splines" e aplicar as "Transformações Geométricas", de modo a conseguir interações do fractal foco.

[1] Essa construção está disponível em https://www.geogebra.org/classic/djfaafse. Para acessar os passos da construção é possível realizar o download do arquivo e acessar o protocolo de construção.

Referências

ALVES, C. M. F. S. J. **Fractais: Conceitos básicos, representações gráficas e aplicações ao ensino não universitário.** Dissertação de Mestrado em Matemática para o Ensino. Universidade de Lisboa, Lisboa, 2007.

BRASIL. MEC. Secretaria de Educação Média e Tecnológica**. Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio.** Brasília, 1999.

BRASIL. MEC. Secretaria da Educação Básica. **Base nacional comum curricular.** Brasília, 2017.

CIENCIA TUBE, O que é um fractal. 2011. Disponível em: http://www.cienciatube.com/2011/11/o-que-e-um-fractal.html . Acesso: 23 ago. 2018.

EBERSON, R.R. **Um estudo sobre a construção de Fractais em ambientes computacionais e suas relações com transformações geométricas no plano.** Mestrado em Educação Matemática, PUC/SP, São Paulo, 2004.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético dedutivo.** Tese de doutorado, UFRGS, Porto Alegre, 2001.

ROUSSEAU, C. SAINT-AUBIN, Y. **Matemática e atualidade.** Rio de Janeiro: SBM, 2015.

SALLUM, E. M. Fractais no ensino médio. Revista do Professor de Matemática, RPM, nº 57, 2005.

ZULATTO, Rúbia Barcelos Amaral. **Professores de matemática que utilizam softwares de geometria dinâmica: suas características e perspectivas.** Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2002.