



LEI DO RESFRIAMENTO DE NEWTON: MODELAGEM MATEMÁTICA E ENSINO-APRENDIZAGEM

Wesley Muniz Domingos Rodrigues
Universidade do Oeste Paulista - UNOESTE
wesleymdrodrigues@gmail.com

Monica Fürkotter
Universidade do Oeste Paulista – Unoeste
monicaf@unoeste.br

Marília Davoli Moreira Lopes
Universidade do Oeste Paulista - Unoeste
marilia@unoeste.br

Resumo: Neste texto apresentamos resultados parciais de um projeto de iniciação científica, em desenvolvimento, no qual discutimos a Modelagem Matemática como estratégia no processo de ensino e aprendizagem de Matemática a partir de modelos da Física Matemática. Trata-se do relato de uma atividade experimental, articulada ao modelo originado da Lei do Resfriamento de Newton. O experimento teve como objetivo obter dados reais da variação da temperatura da água em diferentes intervalos de tempo, e compará-los a dados obtidos por meio dos cálculos da equação diferencial ordinária que rege o modelo, em situação de resfriamento e de aquecimento. Na comparação dos dados, a análise revela que os dados obtidos são melhor ajustados em intervalos de dez minutos e que o ajuste é pior no intervalo de dois minutos, o que pode ter ocorrido devido à erros técnicos de aferição e observação dentro do laboratório. A análise do experimento agregou um conhecimento significativo à futura prática docente do licenciando em Matemática. Além disso, revelou a necessidade de ampliar os estudos, abarcando conceitos de Química e Física, para entender melhor os resultados, em uma postura interdisciplinar; e de realizar outros experimentos, buscando aprofundar os resultados obtidos.

Palavras-chave: Lei do resfriamento de Newton. Modelagem Matemática. Equações diferenciais ordinárias. Ensino-aprendizagem.

INTRODUÇÃO

O que chamamos de Modelagem Matemática pode ser descrita como uma arte que, além de ilustrativa e deslumbrante, tem seus pontos particulares de importância, por tratar de aspectos de extrema relevância para o desenvolvimento de análises e soluções de inúmeras situações problema no decorrer da história da humanidade. Segundo Biembengut e Hein (2003, p. 11),

[...] o ser humano sempre recorreu aos modelos, tanto para comunicar-se com seus semelhantes como para preparar uma ação. Nesse sentido, a modelagem, arte de modelar, é um processo que emerge da própria razão e participa da nossa vida como forma de constituição e expressão do conhecimento.

Um modelo, por sua vez, envolve diversas variáveis que precisam ser qualificadas e quantificadas de modo que, por meio de desenhos, diagramas, gráficos, tabelas, equações ou até softwares, se obtenha uma solução e resultados que propiciem a compreensão da realidade em estudo.

Podemos dizer que a Modelagem Matemática é um processo de interação da Matemática com um problema real, com o objetivo de analisar comportamentos, discutir simulações, apontar dados, fazer previsões, buscar explicações, tomar decisões, etc. Ela abrange problemas de diferentes áreas do conhecimento, de Ciências Humanas, Exatas e Biológicas. Assim, tem sido utilizada para resolver problemas de Economia, Administração, Física, Engenharias, Biologia, Química, Medicina, Psicologia, etc.

A Modelagem Matemática é também muito empregada como uma estratégia no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Com ela, problemas interdisciplinares, que envolvem temas e conteúdos de duas ou mais áreas do conhecimento, podem ser resolvidos utilizando a Matemática, mostrando aos alunos a aplicabilidade dos conteúdos matemáticos e respondendo à pergunta clássica que eles fazem, sobre a utilidade da Matemática aprendida na escola.

Com a modelagem podemos tornar as aulas mais dinâmicas, discutir diferentes temas, selecionar informações relevantes para a compreensão de um problema, realizar e analisar simulações, identificar padrões, fazer previsões e conjecturas, e obter uma equação matemática que descreva um problema.

Ao partir de um problema não matemático e realizar a modelagem, o aluno deve abstrair e esse processo o motiva a pesquisar, a querer aprender sempre mais. Segundo D'Ambrosio (1996, p. 31), isso é importante, pois

[...] a matemática que se ensina hoje nas escolas é morta. Poderia ser tratada como um fato histórico. [...] Interessa à criança, ao jovem e ao aprendiz em geral aquilo que tem apelo às suas percepções materiais e intelectuais mais imediatas. Por isso que proponho um enfoque ligado a situações mais imediatas.

Usar a modelagem como metodologia de ensino e aprendizagem pode trazer inúmeros benefícios para a aprendizagem dos alunos, ainda que demande um tempo maior do professor, no que diz respeito ao planejamento e desenvolvimento das aulas. Há uma mudança de papéis, o professor assume o papel de mediador e o aluno passa a ser protagonista da sua aprendizagem.

Bassanezi (2002) defende a inclusão das aplicações, da resolução de problemas e da modelagem no ensino de Matemática, apresentando os seguintes argumentos: desenvolve nos alunos capacidades e atitudes que os tornam criativos para resolver problemas; prepara-os para

atuar em problemas da vida real, com competência para assumir posições e tomar decisões; prepara-os, também, para utilizar a Matemática na resolução de problemas de outras áreas; fornece condições para que eles entendam melhor a própria Matemática.

Importante destacar que o autor também chama atenção para os obstáculos instrucionais presentes na utilização da Modelagem Matemática em cursos regulares, para os estudantes e para os professores, destacando os seguintes:

- [...] A modelagem pode ser um processo muito demorado não dando tempo para cumprir o programa todo.
- [...] O uso de Modelagem foge da rotina do ensino tradicional e os estudantes, não acostumados ao processo, podem se perder e se tornar apáticos nas aulas.
- [...] A formação heterogênea de uma classe pode ser também um obstáculo para que alguns alunos relacionem os conhecimentos teóricos adquiridos com a situação prática em estudo.
- [...] Muitos professores não se sentem habilitados a desenvolver modelagem em seus cursos, por falta de conhecimento do processo ou por medo de se encontrarem em situações embaraçosas quanto às aplicações de matemática em áreas que desconhecem. (BASSANEZZI, 2002, p. 37)

É fato que tais dificuldades podem aparecer e é fundamental que o professor tenha uma formação que permita a ele decidir em qual situação utilizará a Modelagem Matemática em suas aulas.

Pensando nisso, como aluno do curso de Licenciatura em Matemática, que tem certa afinidade com a Física, desenvolvemos um projeto de Iniciação Científica intitulado “Equações Diferenciais Ordinárias, Modelagem Matemática e a Física Matemática”, com o objetivo de melhor compreender o potencial da Modelagem Matemática em problemas da Física Matemática que envolvem Equações Diferenciais Ordinárias, além de desenvolver maturidade ao tratar a literatura científica.

Na estrutura curricular do curso, a disciplina Equações Diferenciais está no 5º termo e será cursada no segundo semestre de 2019. Com o projeto de iniciação científica iniciado durante o 3º. termo, tivemos o privilégio e a disposição de estudar antecipadamente e paralelamente à grade curricular do curso, conteúdos das disciplinas Cálculo Integral e Diferencial III e Equações Diferenciais, para que pudéssemos aprender conteúdos necessários ao estudo e compreensão de modelos conhecidos, como Desintegração Radioativa, Datação por Carbono, Circuitos em Série, Velocidade de Escape, Lançamento de um Foguete, Queda de Corpos, Leis de Newton e Resfriamento de um Corpo, mais citado como Lei do Resfriamento de Newton, entre outros.

Como licenciando, o projeto permite vislumbrar um leque de possibilidades quanto à utilização da Modelagem Matemática para abordar conteúdos matemáticos na futura prática

docente, assim como para despertar o interesse pela continuidade dos estudos e desenvolvimento de projetos e artigos como esse, em que discutimos o modelo do Resfriamento de um Corpo.

LEI DO RESFRIAMENTO DE NEWTON

A Lei do Resfriamento de Newton descreve uma situação de equilíbrio térmico entre um corpo e o ambiente em que ele se encontra. “A taxa de variação da temperatura de um corpo (sem fonte interna) é proporcional à diferença entre sua temperatura e a do meio ambiente” (BASSANEZI; FERREIRA JR., 1988, p. 43). Embora pareça simples, envolve outras variáveis como a superfície de contato do corpo com o meio, o calor específico que quanto maior exigirá mais energia e o tempo de contato.

Considerando o enunciado da lei, quando um corpo de temperatura T é inserido em um ambiente de temperatura constante Ta , a temperatura T se aproximará de Ta . Assim, se a temperatura T for maior que a temperatura Ta , o corpo resfriará, caso contrário, se T for menor que Ta , aquecerá.

Lembrando que a derivada de uma função representa uma variação, a lei pode ser expressa pela equação diferencial ordinária de primeira ordem,

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - Ta)$$

onde $k > 0$ é uma constante de proporcionalidade.

Se $T > Ta$, então $\frac{dT}{dt} < 0$ e se $T < Ta$, $\frac{dT}{dt} > 0$.

A solução geral da equação é dada por $T(t) = Ta + C \cdot e^{-kt}$, onde C é uma constante.

Quando consideramos o tempo t inicial igual a zero, $t = 0$, temos que $C = T_0 - Ta$, obtendo a solução particular $T(t) = Ta + (T_0 - Ta)e^{-kt}$.

A partir do que é apresentado na literatura, desenvolvemos um experimento a fim de relacionar a teoria com a prática, ou seja, estudar, analisar e comparar o comportamento do fenômeno real com o que está presente na teoria.

DESENVOLVIMENTO DO EXPERIMENTO

O experimento consistiu na observação da variação de temperatura de uma mesma substância, a água, durante seu aquecimento e seu resfriamento. Foi realizado no Laboratório

de Química da Unoeste, onde a temperatura ambiente pode ser controlada, dada a existência de aparelho de ar condicionado, assegurando as condições mínimas necessárias que garantissem os melhores resultados possíveis.

A água foi escolhida para o experimento por ser uma substância pura e suas características químicas serem consideradas as mais exatas, a saber, o calor, a densidade e as temperaturas de ebulição e fusão. Além disso, por estar menos sujeita a sofrer interferências, tanto internas quanto externas, além da temperatura ambiente, durante seu resfriamento e aquecimento.

O experimento foi realizado em duas etapas, sendo uma de aquecimento e a outra de resfriamento, em dois momentos, o que justifica termos duas temperaturas ambiente diferentes. Contou com o auxílio de uma professora do curso de Licenciatura em Matemática e de um aluno do 4º termo do curso de Bacharelado em Química.

Foram feitas três observações da variação da temperatura em cada uma das etapas, considerando intervalos de tempo diferentes, 2, 5 e 10 minutos. Ou seja, observamos o comportamento da temperatura de 2 em 2 minutos, depois de 5 em 5 minutos e por fim, de 10 em 10 minutos. Utilizamos o seguinte material: 2 béqueres de 100 ml, 2 béqueres de 250 ml, 2 termômetros químicos padrão, tela de amianto, tripé, bico de Bunsen, água, gelo e cronômetro.

Apresentamos, a seguir, as duas etapas do experimento, Etapas 1 e 2, do resfriamento e do aquecimento, respectivamente.

Etapa 1: Resfriamento

Montamos todos os equipamentos necessários para realizar o resfriamento, assegurando inicialmente que a temperatura da sala era 24°C. Adicionamos 200 ml de água em um béquer de 250 ml e o aquecemos sobre a tela de amianto em um tripé com o bico de Bunsen até que a água atingisse 80°C.

Com o béquer sobre a bancada e com o termômetro suspenso com o auxílio de um pegador de madeira, iniciamos o cronômetro para fazer as anotações da variação de temperatura. Utilizamos três tabelas que preparamos antecipadamente, com intervalos de 2, 5 e 10 minutos. As Tabelas 1, 2 e 3 foram preenchidas simultaneamente, à medida que o cronômetro registrava a variação do tempo.

Tabela 1 - Resfriamento em intervalos de 2 minutos

Intervalo	Tempo (Minutos)	Temperatura (°C)	Variação (°C)
1	0	80	0
2	2	78,5	-1,5
3	4	74	-4,5
4	6	70	-4
5	8	67	-3

Fonte: os autores

Tabela 2 - Resfriamento em intervalos de 5 minutos

Intervalo	Tempo (Minutos)	Temperatura (°C)	Variação (°C)
1	0	80	0
2	5	72	-8
3	10	63,5	-8,5
4	15	57	-6,5
5	20	51	-6

Fonte: os autores

Tabela 3: Resfriamento em intervalos de 10 minutos

Intervalo	Tempo (Minutos)	Temperatura (°C)	Variação (°C)
1	0	80	0
2	10	63,5	-6,5
3	20	51	-12,5
4	30	44	-7
5	40	39	-5

Fonte: os autores

A temperatura ambiente do início ao fim se manteve constante, em 24° C.

Etapa 2: Aquecimento

Iniciando a segunda etapa do experimento, de aquecimento, já com o ar condicionado ligado durante algum tempo até que a bancada estivesse montada, foi verificado com um termômetro que a temperatura ambiente era 22°C e já não se alterava mais. Então, em um béquer de 250 ml, adicionamos 200 ml de água natural, junto de algumas pedras de gelo, e deixamos o béquer imerso em um recipiente redondo, também com gelo, para que a temperatura diminuísse. Em seguida, retiramos o béquer do gelo e o gelo que estava junto à água, para termos uma solução homogênea. Se fosse feita a observação da variação de temperatura de uma solução água mais gelo, seria inconsistente e imprecisa já que é uma fase que exige muito mais energia para que o gelo sofra fusão e a temperatura comece a aumentar. Então, rapidamente, adicionamos os 200 ml da água resfriada em outro béquer e constatamos, com auxílio de um termômetro, a temperatura inicial de 3°C.

Nesse momento, acionamos o cronômetro e iniciamos a observação, anotando as temperaturas em três tabelas também previamente elaboradas, assim como procedemos no caso do resfriamento.

As Tabelas 4, 5 e 6 resultantes são apresentadas a seguir.

Tabela 4 - Aquecimento em intervalos de 2 minutos

Intervalo	Tempo (Minutos)	Temperatura (°C)	Varição (°C)
1	0	3	0
2	2	3,4	+0,4
3	4	4	+0,6
4	6	5,1	+1,0
5	8	6,1	+1,0

Fonte: os autores

Tabela 5 - Aquecimento em intervalos de 5 minutos

Intervalo	Tempo (Minutos)	Temperatura (°C)	Varição (°C)
1	0	3	0
2	5	4,9	+1,9
3	10	6,6	+1,7
4	15	8,2	+1,6
5	20	9,8	+1,6

Fonte: os autores

Tabela 6 - Aquecimento em intervalos de 10 minutos

Intervalo	Tempo (Minutos)	Temperatura (°C)	Varição (°C)
1	0	3	0
2	10	6,6	+3,6
3	20	9,8	+3,2
4	30	12	+2,2
5	40	13,6	+1,6

Fonte: os autores

Com as temperaturas obtidas iniciamos a análise, apresentada na próxima seção.

RESULTADOS

Com os dados obtidos no experimento e apresentados nas Tabelas 1 a 6 elaboramos os gráficos apresentados na Figura 4, utilizando o Microsoft Excel, de modo a visualizar melhor o resfriamento e o aquecimento nos intervalos de tempo considerados. Ainda que os dados sejam pontos, optou-se por um gráfico que pudesse ligá-los de modo a perceber que curva poderia ajustá-los.

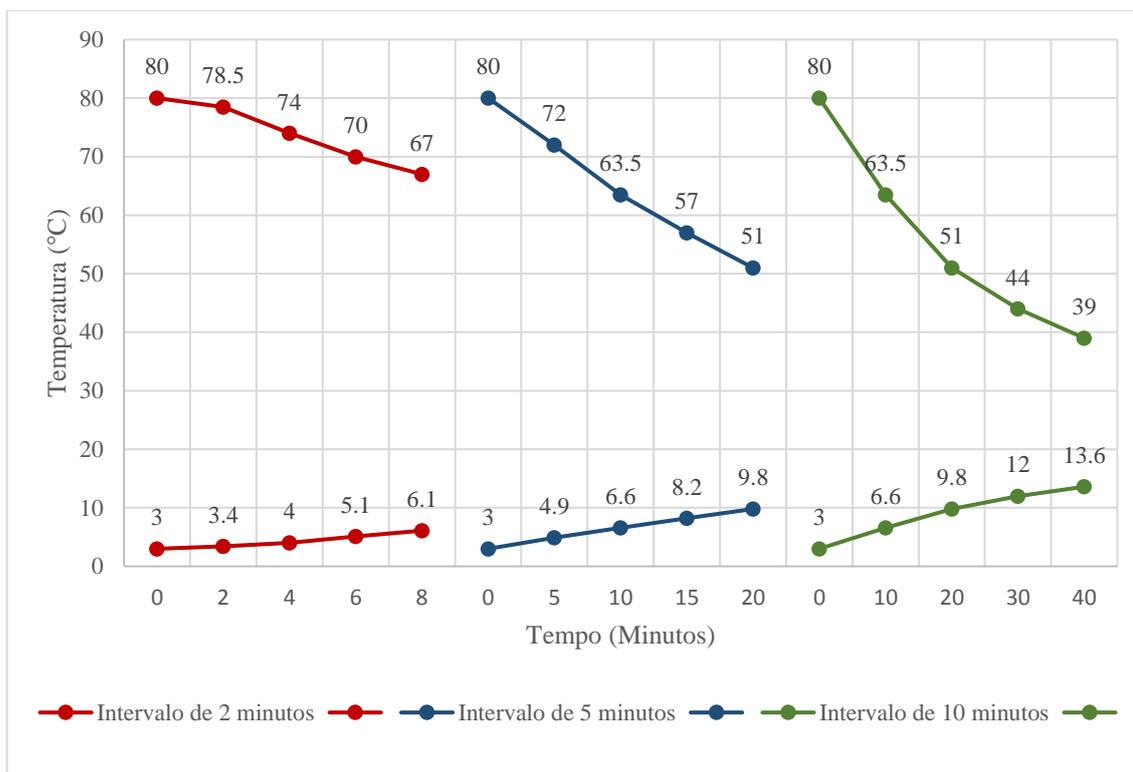


Figura 4 - Resfriamento e aquecimento da água, por intervalo considerado
Fonte: os autores

Além disso, a temperatura inicial da água e a temperatura observada decorrido o primeiro intervalo de tempo, nas duas etapas, permitiram calcular a constante k na solução $T(t) = Ta + (To - Ta)e^{-kt}$, nos casos de resfriamento e aquecimento, para cada um dos intervalos de tempo considerados, conforme a tabela a seguir.

Tabela 7 – Valores da constante k

Intervalo (minutos)	Aquecimento	Resfriamento
2	0,0106387	0,0135755
5	0,0210721	0,0308301
10	0,0210071	0,0349051

Fonte: os autores

Nas Tabelas 8, 9 e 10 apresentamos os dados do experimento, obtidos a partir da solução da equação e os erros correspondentes, para os intervalos de 2, 5 e 10 minutos, respectivamente.

Tabela 8 – Comparação dos dados, intervalos de 2 minutos

Tempo (Min)	Resfriamento (°C)		Erro (%)	Aquecimento (°C)		Erro (%)
	Experimento	Cálculo		Experimento	Solução	
0	80	80	0	3	3	0
2	78,5	78,5	0	3,4	3,4	0
4	74	77,040	+4,1	4	3,7915	-5,21
6	70	75,6194	+8,02	5,1	4,1749	-18,13
8	67	74,2367	+10,8	6,1	4,5501	-25,41

Fonte: os autores

Tabela 9 – Comparação dos dados, intervalos de 5 minutos

Tempo (Min)	Resfriamento (°C)		Erro (%)	Aquecimento (°C)		Erro (%)
	Experimento	Solução		Experimento	Cálculo	
0	80	80	0	3	3	0
5	72	72	0	4,9	4,9	0
10	63,5	65,1428	+2,58	6,6	6,609	+0,13
15	57	59,2653	+3,97	8,2	8,149	-0,62
20	51	54,2274	+6,32	9,8	9,5341	-2,71

Fonte: os autores

Tabela 10 – Comparação dos dados, intervalos de 10 minutos

Tempo (Min)	Resfriamento (°C)		Erro (%)	Aquecimento (°C)		Erro (%)
	Experimento	Cálculo		Experimento	Cálculo	
0	80	80	0	3	3	0
10	63,5	63,5	0	6,6	6,6	0
20	51	51,8616	+1,68	9,8	9,5178	-2,87
30	44	43,6523	-0,79	12	11,8829	-0,97
40	39	37,8619	-2,91	13,6	13,7998	+1,47

Fonte: os autores

A comparação dos dados mostra que quando trabalhamos com os intervalos de 2 minutos há uma diferença entre os valores obtidos no experimento e os obtidos pela solução da equação do Modelo do Resfriamento de Newton. Os erros aumentam à medida que o tempo passa, sendo maiores no caso do aquecimento. Cabe observar que os valores obtidos pela solução da equação são maiores que os reais no caso do resfriamento e menores, no caso do aquecimento. Acreditamos que tais diferenças de temperatura podem ser justificadas por erros técnicos de aferição do termômetro e observação da variação da temperatura, já que era um curto período de tempo comparado ao tempo envolvido nos dois outros intervalos.

Os erros são menores no experimento com os intervalos de 10 minutos e uma análise da Figura 4 revela que nesse caso os pontos parecem determinar uma curva que lembra uma exponencial, o que não ocorre para os intervalos de 2 e 5 minutos.

A partir dessa análise construímos, também no Microsoft Excel, gráficos comparando os dados obtidos no experimento e a partir da solução da equação considerando os três intervalos.

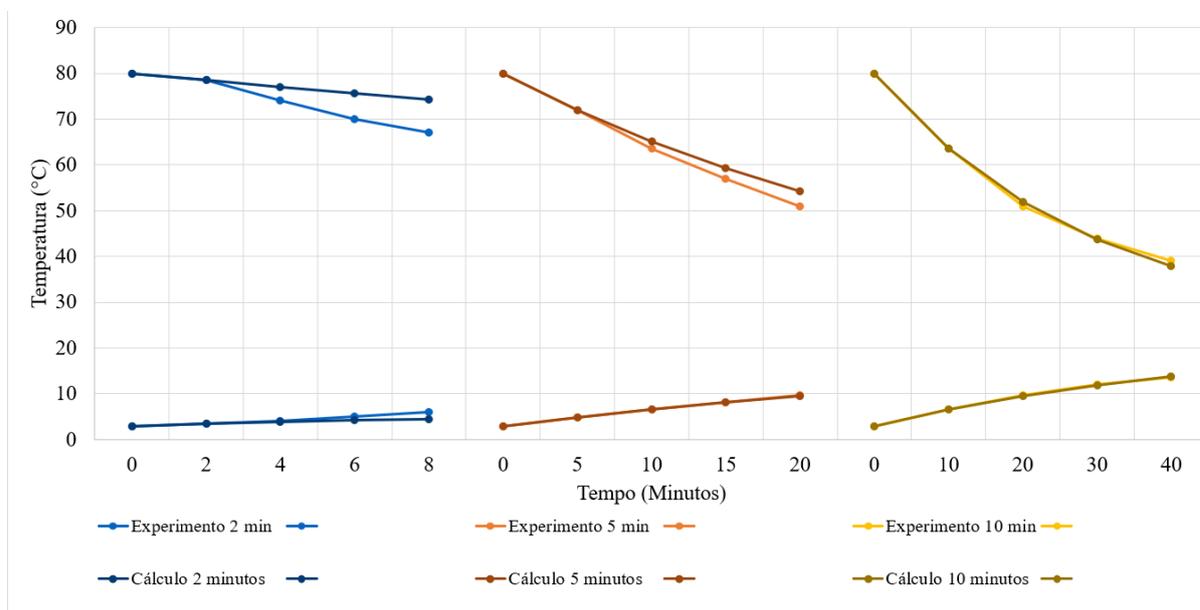


Figura 5 – Comparação dos valores obtidos através do experimento e os valores obtidos através do modelo de resfriamento de Newton

Fonte: os autores

As curvas da parte superior são referentes ao resfriamento e as de baixo, ao aquecimento.

A análise da Figura 5 revela que a solução da equação ajusta bem os dados obtidos no experimento no caso do intervalo de 10 minutos, o que não ocorre nos dois outros intervalos.

Ficam nítidos os erros no caso do intervalo de 2 minutos, resfriamento e aquecimento, assim como no intervalo de 5 minutos, para o resfriamento. Há uma diferença significativa entre os dados, nesses casos. No caso do intervalo de 5 minutos o ajuste é melhor para o aquecimento.

Concluimos que o modelo representa melhor os dados experimentais quando o intervalo de tempo é maior. Ou seja, os dados nos levam a pensar que a Lei de Resfriamento de Newton não é aplicável em pequenos intervalos de tempo, ocorrendo erros.

Essa análise revelou a necessidade de ampliar nossos estudos de modo a abarcar conceitos de Química e Física, em uma postura interdisciplinar. Tais estudos revelaram que uma explicação possível para isto é que a água, quando comparada a outras substâncias, possui o maior calor específico, sendo de 1 Cal/g. °C. E, quanto maior o calor específico, maior será a quantidade de energia para que ocorram variações de temperatura, sendo esta uma das variáveis que Newton citou ao formular o modelo. Isso quer dizer que existe um curto período de tempo onde a substância está acumulando energia para que a temperatura varie expressivamente. Isso

pode ser confirmado na Figura 4, no intervalo de 2 minutos, para o resfriamento e para o aquecimento.

Cabe ainda retomar a Lei do Resfriamento de Newton, que descreve uma situação de equilíbrio térmico entre um corpo e o ambiente em que ele se encontra. Ou seja, como bem expressa a solução da equação, a temperatura do corpo tende à temperatura ambiente, à medida que o tempo passa consideravelmente. Assim, seria necessário não somente considerar o intervalo de 10 minutos, mas ter também mais dados sobre a variação da temperatura, considerando mais intervalos de tempo de 10 minutos, de modo a determinar em que momento a temperatura se aproxima da temperatura ambiente.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse artigo, no qual descrevemos uma atividade experimental envolvendo o resfriamento e o aquecimento da água, acrescentou um imenso conhecimento prático à vida do acadêmico, futuro professor de Matemática. Revelou a possibilidade de trabalhar conteúdos da Matemática ou Física de uma maneira mais prática e dinâmica, com dados reais. O aluno vislumbrou a possibilidade de partir de uma atividade experimental, utilizar os dados para construir os gráficos, identificar então as funções exponenciais relacionando-as com o Modelo do Resfriamento de Newton.

A atividade experimental também propiciou reflexões que podem originar estudos futuros. O que ocorreria, por exemplo, se trabalhássemos com uma outra substância líquida com características específicas, ou ainda com sólidos ou alguma outra substância com características totalmente diferentes, como uma que tenha calor específico muito baixo? E se repetíssemos o evento considerando medições de 10 em 10 minutos, mas por um tempo maior, não somente com cinco medições? São indagações que despertam curiosidade e anseio pela continuidade dos estudos e que procuraremos responder a médio prazo.

REFERÊNCIAS

BASSANEZI, R. C.; FERREIRA, W. C. F. Jr. **Equações diferenciais com aplicações**. São Paulo: Harbra, 1988.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. São Paulo: Contexto, 2003.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática**: da teoria à prática. 10. ed. Campinas: Papirus, 1996.