EXPLORANDO FUNÇÃO EXPONENCIAL COM A TORRE DE HANÓI: UM RELATO DE EXPERIÊNCIA[1]

Andriele Zimpel
UTFPR – Campus Toledo
andrielezimpel@gmail.com

Resumo
Este trabalho, realizado no âmbito do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), relata uma experiência realizada em um 3º ano do Ensino Médio quando discutiam o conceito de função exponencial a partir de uma investigação utilizando o jogo Torre de Hanói. A proposta surgiu da sugestão do coordenador de área do PIBID, inspirada por uma atividade realizada por ele em uma disciplina da graduação. A Torre de Hanói foi escolhida por seu potencial lúdico e investigativo. Na aula, os alunos foram divididos em grupos para resolver problemas de movimentação mínima de discos, correlacionando o número de discos ao número de movimentos e elaborando um modelo a partir dos dados coletados. Os resultados mostraram que a atividade promoveu interação e colaboração, apesar de algumas dificuldades iniciais. Um grupo estabeleceu rapidamente a relação correta, enquanto outro precisou de mais intervenção. Notou-se uma desmotivação dos alunos ao passar da atividade lúdica para a tarefa investigativa, evidenciando resistência ao afastamento do ensino tradicional. Como conclusão, a atividade foi rica em termos de pesquisa pedagógica, fornecendo *insights* sobre as dificuldades e resistências dos alunos, além de sugestões para futuras aplicações mais eficazes de métodos investigativos no ensino de matemática.

Palavras-chave: Aprendizagem lúdica. Educação matemática. Ensino Médio. PIBID.

Introdução

O presente trabalho foi desenvolvido no âmbito do PIBID. Minha permanência ocorria no Colégio Estadual Cívico Militar XXXXX às quartas-feiras no período da manhã nas turmas de 1º, 2º e 3º ano do Ensino Médio. A ideia de trabalhar a Torre de Hanói para discutir a ideia de função exponencial, surgiu de uma proposta feita por nosso coordenador do PIBID de realizar uma atividade investigativa com alguma turma que acompanhávamos na escola e sobre a experiência escrever um relato. Dentre as três turmas que eu auxiliava na escola, li os planos de aula de cada uma, mais especificamente o conteúdo que seria abordado, e o que me chamou a atenção foi o conteúdo de equação e função exponencial no 3ºB. No exato momento me lembrei de uma atividade proposta pelo meu coordenador do PIBID enquanto professor de graduação e assim surgiu a ideia de aplicar a Torre de Hanói para introduzir o conteúdo de função exponencial em forma de Investigação Matemática.

[1] Este trabalho foi orientado pelo professor Dr Rodolfo Eduardo Vertuan, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, rodolfovertuan@yahoo.com.br, que só não consta como coautor, por conta da limitação do evento em relação ao número máximo de trabalhos que um mesmo autor pode submeter.

Ingressei na Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campus Toledo, no ano de 2023/1 e a primeira aula que tive aqui foi de Elementos 1 com o Professor Rodolfo Eduardo Vertuan, também coordenador do PIBID. Durante as aulas ele sempre buscava trazer ferramentas diferentes para o aprendizado, sejam softwares que auxiliassem no aprendizado ou até mesmo jogos que nos instigassem a desenvolver o pensamento matemático.

Em uma destas aulas ele nos apresentou um jogo denominado Torre de Hanói, nos dividiu em grupos e nos explicou as regras: só poderíamos movimentar uma peça por vez, não poderíamos colocar uma peça maior em cima de uma menor e um disco deveria estar sempre em uma das três hastes ou em movimento. Lembro que achei a atividade deveras interessante, de fato um tanto quanto complexa, mas muito lúdica e instigadora.

Mas a questão é: o que isso tem a ver com Investigação Matemática? De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2003, p.13), “investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades”. Dessa forma, a Torre de Hanói entra como atividade que possibilita a investigação. A partir do momento que os alunos precisam pensar por si mesmos, estabelecer relações e se comunicar para chegar a conclusões sobre a atividade apresentada e o que ela representa, é uma investigação matemática. E “a cada momento que se utiliza o pensamento na construção de ideias a respeito do mundo pratica-se o exercício da estruturação do conhecimento [...]” (Mendes, 2009, p. 123).

Portanto, esse é o fito da aplicação dessa atividade nessa turma: propor por meio de uma atividade lúdica que eles desenvolvam seu raciocínio, comunicação e pensamento lógico, para de fato tornar os alunos protagonistas. Ou seja, promover uma investigação matemática utilizando a Torre de Hanói como ferramenta para o ensino e a aprendizagem de função exponencial, situação cuja experiência temos como objetivo relatar neste texto.

O mito do templo de Benares e o fim do mundo

De acordo com Lima (2013), o jogo Torre de Hanói, também conhecido como Quebra-Cabeças do Fim do Mundo e Torre de Bramanismo, foi apresentado pelo matemático francês Edouard Lucas em 1883 e vendido como brinquedo. A base da inspiração do matemático para a criação do jogo vem de uma lenda Hindu. A lenda diz que havia um templo em Benares, uma cidade sagrada da Índia, onde existia uma torre do bramanismo dedicada a aprimorar a disciplina mental dos jovens monges. Abaixo da cúpula deste templo, marcada como o centro do mundo, havia três hastes de diamante fixadas em uma placa de bronze e, em uma destas hastes, 64 discos de ouro de diferentes diâmetros dispostos em formato de pirâmide.

De acordo com a lenda, estes discos foram colocados pelo deus Brahma no momento da criação do mundo. Os monges tinham a tarefa de mover os discos entre as hastes seguindo regras divinas: mover apenas um disco por vez e não colocar um disco de diâmetro maior sobre um de diâmetro menor. O objetivo era transferir a pirâmide para outra haste, seguindo as regras divinas. Os monges deveriam trabalhar incessantemente nesta tarefa e, no dia em que conseguissem finalizar o trabalho, o templo seria transformado em pó e o fim do mundo chegaria.

A partir do jogo, inspirado por este mito, foram gerados muitos resultados matemáticos interessantes que podem ser utilizados como parte do processo de ensino e aprendizagem tornando-o mais cativante. Este artigo abordará um exemplo da utilização deste jogo “místico” no ensino: o uso do jogo Torre de Hanói como ferramenta de ensino da função exponencial em uma turma do terceiro ano do Ensino Médio.

Uma questão que emerge deste mito é acerca de quanto tempo resta até o fim do mundo. Para responder a isso, é necessário estabelecer o tempo médio gasto em cada movimento. Além disso, é possível fazer tal transferência? Quantas formas existem de fazê-lo? Qual é a quantidade mínima de movimentos que possibilita a tarefa ser cumprida? Embora não se saiba se os monges seguem a estratégia que minimiza a quantidade de movimentos, é possível prever a partir do tempo gasto nesta estratégia quando ocorrerá o fim do mundo segundo a lenda?

Material e Métodos

Este trabalho relata uma aula desenvolvida no âmbito do PIBID de Matemática em uma escola pública do oeste paranaense parceira do curso de Licenciatura em Matemática, mais especificamente, em uma turma do 3º ano do Ensino Médio cuja professora era supervisora do PIBID. A escolha da turma seguiu as diretrizes do currículo de Matemática para o Ensino Médio, pois, no atual currículo, é nessa etapa que os alunos estudam a fundo o conteúdo de função exponencial. Conteúdo este que pode ser associado de forma intrínseca com o jogo Torre de Hanói, que será utilizado para aplicação em conjunto com a tendência metodológica de ensino denominada Investigação Matemática.

A atividade foi aplicada na sala de aula em que faço minha permanência no PIBID e contou com a utilização de duas Torres de Hanói físicas. Existe a possibilidade da utilização de softwares para a aplicação, entretanto, neste caso optei pela utilização do material físico, pois de acordo com Matos e Serrazina (1996) “mais importante que os materiais com que está a trabalhar, a experiência que o aluno está a realizar deve ser significativa para ele”. Nesse sentido, a manipulação do material é de suma importância para o aprendizado do aluno, porque apesar de existirem softwares que cumprem a mesma função do material físico, com o físico além do aluno se divertir ele não tem a “tentação” de navegar em outros sites e perder o foco da atividade proposta.

O jogo consiste num quebra-cabeça matemático composto por três hastes e vários discos de tamanhos diferentes. O objetivo é mover todos os discos da haste inicial para a haste destino, seguindo três regras: apenas um disco pode ser movido por vez, um disco maior não pode ser colocado sobre um disco menor e um disco deve estar sempre em uma das três hastes, ou em movimento.

Figura 1 – Alunos resolvendo a Torre de Hanói
Fonte: os autores

Planejamento da Atividade

A intenção é que a aula iniciasse com a entrega de uma folha contendo a história da origem do jogo, as regras de movimentação e uma questão com o objetivo da atividade. Para compreender melhor a funcionalidade do jogo é possível demonstrar como ele funciona fazendo algumas jogadas.

Após isso, a sala seria dividida em dois grupos pois “...a interacção entre os alunos estimula-os a descobrirem novas relações” (Ponte et al., 1998, p. 65). A ideia é que seja feita uma roda a qual eles se ajudem na resolução do problema. A princípio, o jogo contará com apenas 5 peças para manipulação, porém será levada a sexta peça para o grupo caso seja necessária a sua utilização.

Em seguida, seria desenhada uma tabela no quadro relacionando os números de peças (x) e o número de movimentos (y). Seria solicitado aos alunos que inicialmente completassem a tabela utilizando o jogo e, após a obtenção das respostas, que relacionassem o número de movimento em função do número de peças e criassem uma "regra" ou "fórmula" ou "modelo".

O objetivo é que os alunos observassem o seguinte padrão: com um único disco, são necessários apenas um (2^0) movimento mínimo para percorrer de uma extremidade a outra. Quando há dois discos, o menor realiza dois movimentos mínimos (2^1), enquanto o maior realiza apenas um (2^0), resultando em uma soma mínima de três movimentos. Com três discos, o primeiro (o menor) requer quatro movimentos mínimos (2^0), o do meio realiza dois movimentos mínimos (2^1) e o maior exige um movimento mínimo (2^0), totalizando sete movimentos mínimos para movê-los de uma extremidade à outra.

Os alunos podem determinar a soma mínima total de movimentos de duas maneiras. Uma abordagem é somar as potências que representam os movimentos mínimos de cada disco. Por exemplo, com 3 discos: $\left(2^2\right) + \left(2^1\right) + \left(2^0\right) = 7$. Alternativamente, eles podem utilizar a fórmula $2^n - 1$, onde n é o número de discos. No caso de 3 discos, $\left(2^3\right) - 1 = 7$, apresentando assim uma expressão geral para esta função do tipo exponencial.

Após a construção da "fórmula", seria feita a representação dela no software GeoGebra, discutindo a diferença da representação gráfica que é contínua no software e a representação gráfica que representa de fato a situação que, no caso, é discreta, já que tanto para o número discos que movimentamos, quanto para o número de movimentos associados aos discos, utilizamos valores inteiros. Em seguida, utilizando o mesmo software e uma representação geral de uma função exponencial $f(x) = a^x$, sistematizaremos os conceitos de função exponencial. Entendemos que essa abordagem está alinhada ao que Duval (2012) considera importante:

> [...] é essencial, na atividade matemática, poder mobilizar muitos registros de representação semiótica (figuras, gráficos, escrituras simbólicas, língua natural, etc...) no decorrer de um mesmo passo, poder escolher um registro no lugar de outro. E, independente de toda comodidade de tratamento, o recurso a muitos registros parece mesmo uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e que possam também ser reconhecidos em cada uma de suas representações. (Duval, 2012, p. 270).

O objetivo é instigar os alunos a perceberem as relações presentes na função pelo gráfico e montarem sua própria regra. Ao exemplo, numa função exponencial o valor da base a tem que ser maior que 0 e diferente de 1, entre 0 e 1 ela é decrescente e maior que 1 ela é crescente. O tempo para aplicação da atividade é de 1 hora e 40 minutos, tempo disponibilizado pela professora regente.

Resultados e Discussões

"As actividades de investigação proporcionam uma relação diferente dos alunos com a disciplina e, também, dos alunos entre si" (Ponte et al., 1998, p. 103). Tendo em vista esta perspectiva, no momento do desenvolvimento da atividade, percebemos sua veracidade. Durante a atividade os alunos interagiram muito bem entre si, trabalharam em equipe para resolver o problema de movimentos mínimos das peças na Torre de Hanói e conseguiram chegar na resposta de movimentos mínimos até 5 peças.

Ambos os grupos trabalharam em conjunto, um dos grupos (chamaremos de grupo 1) apresentou enorme dificuldade na movimentação das peças. Eles chegaram a resultados, porém estes não estavam corretos em relação à solicitação de que seria a quantidade de movimentos mínimos. Porém, o outro grupo (grupo dois) conseguiu descobrir o número de movimentos extremamente rápido. Então, em vez de fazerem somente até a 5ª peça, eles ficaram tentando até a 6ª peça.

Para o desenvolvimento de qualquer atividade que busque algo além da diversão, como no nosso caso, que busca o estabelecimento de relações matemáticas, é necessário a intervenção do professor para a continuidade da investigação. Grando (2001), por exemplo, nos diz que a abordagem pedagógica utilizando jogos nas aulas de Matemática deve ser implementada em sete fases distintas: introdução ao material do jogo, compreensão das regras, prática para assegurar a compreensão das regras, orientação pedagógica verbal, documentação do jogo, intervenção por escrito e prática avançada para desenvolver habilidades. Nesse contexto, para conseguir dar continuidade foi necessária a minha intervenção na parte de relacionar as peças a uma função, envolvendo a quantidade de movimentos.

De acordo com Vale (2012) a qualidade da aula de matemática não apenas se baseia no professor, mas principalmente na ênfase em tarefas matematicamente enriquecedoras, especialmente aquelas de natureza exploratória e investigativa, capazes de promover interações de aprendizagem excelentes. Paralelamente, Lamonato e Passos (2011) evidenciam que investigar é buscar o desconhecido; é questionar e procurar respostas, além disso exploração-investigação matemática é vista como um método para promover a aprendizagem da matemática, oferecendo ao estudante oportunidades de produzir e criar seus próprios conhecimentos, respeitando seu nível de desenvolvimento. Nesse sentido, destaca-se a importância de o aluno tentar buscar sua própria resolução e, por mais que o foco deste artigo seja função exponencial, quando falamos da parte investigativa, destaca-se a busca de quaisquer que sejam os padrões e resoluções desenvolvidas por parte dos alunos.

Durante a atividade, no momento de aplicação, enquanto os alunos viam aquilo simplesmente como um jogo, o desenvolvimento e o trabalho de equipe para descobrir a quantidade mínima de movimento por número de peças foi excelente. Ainda que tenha deixado exposto o objetivo da atividade desde o início da aula, no momento que ressaltei o objetivo e pedi que os alunos relacionassem o número de peças aos movimentos, todavia, eles desanimaram e começaram a desistir da atividade.

O objetivo principal não era que eles aceitassem a resposta, mas que se esforçassem para investigar relações matemáticas com o jogo em questão. Durante o jogo, cada aluno fez suas interpretações sobre o jogo, com o propósito de descobrir os conteúdos matemáticos: função exponencial e as fórmulas relacionadas a esses conteúdos. Segundo Brenelli (2001), o aluno, ao jogar, "organiza e pratica as regras, elabora estratégias e cria procedimentos a fim de vencer as situações-problema desencadeadas pelo contexto lúdico". Em relação à investigação por parte dos alunos, percebe se que ao longo da aula eles pararam de tentar estabelecer relações, entretanto, por mais que o objetivo fosse função exponencial, um deles conseguiu estabelecer outro tipo de relação.

Um dos alunos percebeu uma relação entre cada quantidade mínima de movimentos que foi: soma dois e mais um, ou seja, ele percebeu que somando duas vezes o número anterior mais um ele iria obter a quantidade mínima de movimento seguinte. Por exemplo, uma peça: $0 + 0 + 1= 1$, com duas peças: $1 + 1 + 1= 3$, com três peças: $3 + 3 +1=7$, com quatro peças: $7 + 7 + 1=15$, com 5 peças: $15 + 15 + 1= 31$, com seis peças: $31 + 31 + 1= 63$, e assim por diante.

Chegando ao final da aula, comecei a dar dicas que auxiliassem os alunos na resolução. Meu propósito é que eles chegassem ao número que os levaria a resposta, ou seja, o número dois. O auxílio de uma colega da faculdade, me ajudou a perceber uma relação que não havia percebido até então, a peça pequena estará sempre acima impossibilitando o posicionamento de qualquer peça sobre ela, dessa forma você terá somente duas torres para realizar seus movimentos. Repassei este aprendizado aos alunos, alguns poucos alunos continuaram a tentar, chegaram a me apresentar uma equação:

$f(x) = 2x - 1$. Foi de fato uma conclusão bem interessante visto que ela funciona para relacionar algumas peças, por exemplo, uma peça $f(1) - 2 * 1 = 1$, duas peças $f(2) = 2 * 2 - 1 = 3$, porém com três peças $f(3) = 2 * 3 - 1 = 5$, já não funcionava. O aluno foi tentando resolver o "enigma" e por meio de meu auxílio ele chegou ao resultado $f(x) = 2^x - 1$.

Após a descoberta dessa relação, foi utilizado o software GeoGebra para representação desta função do tipo exponencial. Em sequência, para dar início a função exponencial de fato, utilizamos o mesmo software com o intuito de que, utilizando uma equação geral $f(x) = a^x$ e movimentando o controle deslizante (componente do software que funciona como uma barra que se movimenta por valores de 0,1 em 0,1 em função da incógnita desejada) eles criem suas próprias "regras" para a função exponencial.

Movimentando o controle deslizante para esquerda no lado negativo os alunos perceberam que não havia função, ao serem questionados do motivo não souberam responder, então expliquei que para certos expoentes, a função pode não estar definida. Por exemplo, quando a base é -4 e o expoente é $\frac{1}{2}$, como não há raiz quadrada de números negativos no conjunto dos números reais, não haveria imagem definida para esse valor na função. Quando o controle está no zero também não há função exponencial, pois, qualquer expoente que se coloque na base 0 (a não ser o próprio 0 que gera uma indeterminação) resulta em zero, uma função constante. Continuando movendo o controle entre 0 e 1 os alunos perceberam que a função é decrescente e para valores da base maiores que 1 a função é crescente. Portanto, com essas observações dos alunos escrevemos a regra: f: R→R tal que $f(x) = a^x$, em que a > 0 e a ≠ 1.

Como caracterizado por Ponte (2003, p.2):

> [...] investigar não significa necessariamente lidar com problemas na fronteira do conhecimento nem com problemas de grande dificuldade. Significa, apenas, trabalhar a partir de questões que nos interessam e que apresentam inicialmente confusas, mas que conseguimos clarificar e estudar de modo organizado.

A questão sobre função exponencial ainda não estava clara para os alunos, por isso a necessidade de partir do princípio da investigação matemática e fazer com que os alunos buscassem suas próprias respostas mesmo que seja analisando graficamente os deslocamentos da função. Por ter se constituído uma situação lúdica e de interesse para os estudantes, o engajamento foi significativo e muitos participaram inclusive do momento da sistematização do conceito, o que nem sempre acontecia naquela turma.

Considerações Finais

Uma fala interessante utilizada por nosso coordenador do PIBID é que temos que diferenciar resultados como professores e como pesquisadores. Durante esta atividade isto ficou evidente, como futura professora os resultados não me agradaram, a falta de motivação dos estudantes e a preguiça de pensar são fatores cruciais que levam a maioria dos professores a evitarem atividades de cunho não tradicional para com os alunos. Isso ficou evidente durante a aplicação da atividade, pois os alunos apresentaram inicialmente algum interesse, mas a partir do momento que aquilo deixou de ser uma "brincadeira" para eles e a atividade passou a exigir que estabelecessem uma relação matemática, objetivo da docente com a investigação proposta, muitos começaram a abandonar a atividade, ou a realizarem-na sem tanto entusiasmo, como se ela tivesse se tornado "chata" de uma hora para outra.

Então, apesar do esforço para trazer a atividade para que eles pudessem aprender um conteúdo de forma diferente, percebe-se uma resistência por parte deles para sair de uma aula tradicional. Percebi durante a aplicação que até mesmos alunos considerados mais "estudiosos" ficaram entediados a partir do momento que tiveram que pensar de fato. Logo, percebe-se que o ensino tradicional é a zona de conforto da maioria dos estudantes e tirá-los de lá para uma aplicação diferente do tradicional é algo de fato complexo e precisa ser planejado. Isso, no entanto, pode nos levar a refletir o seguinte: essa resistência dos alunos à atividade investigativa seria uma reação a um evento isolado, que praticamente inexiste no contexto das aulas de Matemática que vivenciam na escola? Se as aulas fossem em sua maioria investigativas e eles estivessem habituados a uma outra cultura de fazer e aprender matemática na escola, teriam a mesma resistência? Ou a resistência, nesse caso, aconteceria quando um professor propusesse uma aula como hoje chamamos de tradicional?

Enfim, agora, como pesquisadora, os resultados que tive foram bons, pude analisar as respostas obtidas pelos alunos, como eles chegaram nelas, ou seja, sua forma de pensar, pude aprender o que fiz de errado desta vez para melhorar para uma futura aplicação de outro conteúdo ou desse mesmo novamente. Portanto, foi um tempo bem aproveitado e serviu como material de análise, assim como forma de visualização de como funciona uma atividade de investigação.

Dentre os modos de agir que mudaria em uma próxima aplicação da atividade, estão: me preparar mais para a aula, pesquisando outras formas de auxiliar os alunos na resolução da atividade, de modo a intervir sem lhes dar respostas diretamente; e ter disponíveis mais Torres de Hanói, de modo a dividir os alunos em mais grupos e permitir a exploração do jogo de modo mais personalizado.

Referências

BRENELLI, Rosely Palermo. Espaço lúdico e diagnóstico em dificuldades de aprendizagem: contribuição do jogo de regras. Dificuldades de aprendizagem no contexto psicopedagógico. Petrópolis: Vozes, p. 167-189, 2001.VALE, Isabel. As tarefas de padrões na aula de matemática: um desafio para professores e alunos. **Revista Interacções**, v. 8, n. 20, 2012.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **REVEMAT: Revista Eletrônica de matemática**, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012. Tradução de Méricles Thadeu Moretti.

GEOGEBRA. Versão 6.0.850.0. Boca Raton: Florida Atlantic University, 2024. Disponível em: https://www.geogebra.org. Acesso em: 11 ago. 2024.

GRANDO, R. C. **O jogo na educação: aspectos didático-metodológicos do jogo na educação matemática**. São Paulo: PAULUS, 2001.

LAMONATO, Maiza; PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglion. Discutindo resolução de problemas e exploração-investigação matemática: reflexões para o ensino de matemática. **Zetetiké**, v. 19, n. 2, p. 51-74, 2011.

LIMA, Alexsandra Martins de. Torre de Hanói e função: a matemática pelo viés do jogo. 2013. 59 f. (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Federal da Paraíba, Duas Estradas, 2013.

MATOS, J. M.; SERRAZINA, M. de L. **Didática da Matemática**. Universidade Aberta: Lisboa, 1996.

MENDES, Iran Abreu. **Matemática e Investigação em Sala de Aula**: tecendo redes cognitivas na aprendizagem. São Paulo: Editora Livraria de Física, 2009, p. 123.

PONTE et al. **Histórias de investigações matemáticas.** Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998.

PONTE, J.P. Investigações matemáticas em Portugal. **Investigar em educação**, v. 2, p.93-169, 2003.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Helia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

VALE, Isabel. As tarefas de padrões na aula de matemática: um desafio para professores e alunos. **Revista Interacções**, v. 8, n. 2