LIMITE DE FUNÇÕES REAIS DE UMA VARIÁVEL: UMA ANÁLISE DO CONCEITO E SEU ENSINO EM LIVROS TEXTOS

Adriele Carolini Waideman[1]
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
adrielecarolini@hotmail.com

André Luis Trevisan[2]
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
andreluistrevisan@gmail.com

Claudete Cargnin[3]
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
claucf@gmail.com

Resumo:
Este texto é resultado de uma pesquisa que teve como um dos objetivos retomar a história do Cálculo Diferencial e Integral, especificamente, o conteúdo de limite e continuidade de uma função de uma variável. Também foram analisados livros-textos usados como referências dessa disciplina em várias graduações de diferentes áreas. Refletimos sobre como os autores abordam as formas de introdução ao conteúdo limite levando em consideração as conversões e tratamentos realizados nas resoluções de exemplos introdutórios e em enunciados das tarefas propostas.
Palavras-chave: Ensino de Matemática. Ensino de Cálculo Diferencial e Integral. Limite de funções reais. Ensino de limites. Livros-textos para Cálculo.

Introdução

A disciplina Cálculo Diferencial e Integral I, presente na matriz curricular do primeiro ano dos cursos de Licenciatura e Bacharel em Matemática, Engenharias e outros, tem apresentado, historicamente, um número elevado de reprovações. Infelizmente, esse alto índice de reprovações e também as evasões é muito comum nessa disciplina para a maioria dos cursos superiores da qual essa disciplina faz parte, o que tem despertado o interesse de muitos

---

[1] Mestranda no Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática pela Universidade Federal Tecnológica do Paraná (UFTPR) campi de Londrina/Cornélio Procópio, Londrina-PR, Brasil. Docente colaboradora do Departamento de Matemática da Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR) campus Campo Mourão. E-mail: adrielecarolini@hotmail.com
[2] Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Docente do Depto. de Matemática da Universidade Federal Tecnológica do Paraná (UFTPR) campus de Londrina, Londrina-PR e, professora do PPGMAT, UTFPR-LD/CP, Brasil. E-mail: andreluistrevisan@gmail.com
[3] Doutora em Educação para a Ciência e a Matemática pela Universidade Estadual de Maringá (UEM). Docente do Depto. de Matemática da Universidade Federal Tecnológica do Paraná (UFTPR) campus de Campo Mourão, Campo Mourão-PR e, professora do PPGMAT, UTFPR-LD/CP, Brasil. E-mail: claucf@gmail.com

pesquisadores da Educação Matemática (REZENDE (2004), CURY (2005) e SANTOS e MATOS (2012)).

Devido a uma experiência frustrada desse conteúdo, um dos autores da pesquisa percebeu a necessidade de mudar sua metodologia de ensino para a próxima experiência. Assim, esse trabalho trata a pesquisa bibliográfica como um primeiro passo para uma mudança de metodologia, analisar como os livros-textos referência para a disciplina abordam tal conteúdo. Essa análise buscou comparar os dois livros pelas seções semelhantes como abertura do capítulo, introdução do conteúdo, desenvolvimento dos exemplos de ilustração, definição do conteúdo, formalização rigorosa do conteúdo.

O conteúdo limite, foco da pesquisa, tem por objetivo tratar/mostrar o comportamento de uma função próximo a um determinado ponto, como por exemplo, $x \to a$ ou para valores arbitrariamente grandes em módulo, $x \to +\infty \; ou \; x \to -\infty$.

Uma breve abordagem histórica...

Esse conceito não apareceu nos estudos de cálculo de um dia para o outro, alguns autores, como por exemplo, Thomas (2009) e Amorim (2011), ressaltam a dificuldade do conceito “limite de uma função” e que foram quase 2.500 anos de história para se ter o que os livros-textos trazem e os professores ensinam em salas de aula, em geral em 12[4]horas-aulas, nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral e Matemática Aplicada, por exemplo.

Geralmente, os professores abordam, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I (CDI I), os conteúdos na seguinte ordem: Limite e Continuidade, Derivada e por fim, Integral. Porém, a ordem de descoberta entre esses conteúdos é inversa à apresentada em salas de aulas e pelos livros didáticos.

Segundo os estudos de Eves (2004), os primeiros problemas da história do cálculo estavam relacionados ao cálculo de áreas, volumes e comprimentos de arcos. Esse fato justifica a descoberta do conteúdo “Integral” antes dos demais conceitos, sabendo que o *Cálculo Integral* pode ser usado para calcular áreas e volumes. O autor relata as descobertas e as diferenciam:

> A ideia da integração teve origem em processos somatórios, ligados ao cálculo de certas áreas e certos volumes e comprimentos. A diferenciação, criada bem mais tarde, resultou de problemas sobre tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos. Mais tarde ainda, verificou-se que a integração e a

[4]Os planos de ensino analisados propuseram 4 dias, cada dia tem 3h/aulas, para lecionar sobre esse conteúdo nas disciplinas de CDI I dos cursos analisados, já para a disciplina de Matemática Aplicada I são 5 dias, cada dia têm 2h/aula.

> diferenciação estão relacionadas entre si, sendo cada uma delas operação inversa da outra (EVES, 2004, p. 417).

Com as várias descobertas em relação à Integral e a Derivada, muitas curvaturas, quadraturas e retificações já haviam sido efetuadas, e com isso a ideia de limite seguia ao encontro desses conceitos, o *Teorema Fundamental do Cálculo* ilustra esse encontro. E ainda, segundo Eves (2004, p. 435) no século XVII, "faltava à criação de um simbolismo geral com um conjunto sistemático de regras analíticas formais e também um redesenvolvimento, consistente e rigoroso, dos fundamentos da matéria" esse rigor matemático com símbolos é mostrado nas Figuras 1, retiradas do livro didático Leithold (1994).

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e seja x qualquer número em $[a, b]$. Se F for a função definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

então,

$$F'(x) = f(x) \qquad (2)$$

(Se $x = a$, a derivada em (2) pode ser a derivada à direita e se $x = b$, a derivada em (2) pode ser a derivada à esquerda.)

Figura 1: Regras formais do Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo
Fonte: Livro-texto - Cálculo (LEITHOLD, 1994, p. 345)

O século XVIII foi de aperfeiçoamento do CDI, houve a necessidade de rever os absurdos e contradições, revisar a base do cálculo, propor uma base fundamentada de maneira rigorosa. Foi nesse período que "a ideia de função foi esclarecida, e foram cuidadosamente definidos os conceitos de limites, continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade, espaço, dimensão, convergência etc." (MELCHIORS; SOARES, 2013, p.76-77).

No século XIX, a definição de limite foi uma das maiores contribuições de Cauchy para os estudos do cálculo. Como citado anteriormente, essa construção levou tempo. Foi por volta de 450 a.C, em uma discussão acerca dos quatro paradoxos de Zenão, que reconhecemos os primórdios da elaboração desse conceito. No primeiro desses paradoxos - a Dicotomia - Zenão discute o movimento de um objeto que se move entre dois pontos fixos, *A* e *B*, situados a uma distância finita, considerando uma sequência infinita de intervalos de tempo - T_0, T_1, T_2,..., T_n,... - cada um deles sendo o tempo gasto para percorrer a metade da distância percorrida no movimento anterior. Analisando o problema, Zenão concluiu que, dessa maneira, o móvel nunca chegaria em B.

> *A Dicotomia*: Se um segmento de reta pode ser subdividido indefinidamente, então o movimento é impossível, pois, para percorrê-lo, é preciso antes alcançar seu ponto médio, e antes ainda alcançar o ponto que estabelece a

> marca de um quarto do segmento, e assim por diante, *ad inifinitum*. Segue-se, então, que o movimento jamais começará.
> *A Flecha*: Se o tempo é formado de instantes atômicos indivisíveis, então uma flecha em movimento está sempre parada, posto que em cada instante ela está numa posição fixa. Sendo isto verdadeiro em cada instante, segue-se que a flecha jamais se move (MELCHIORS; SOARES, 2013, p.71).

Ainda segundo as pesquisas de Amorim (2011) e Melchiors e Soares (2013), de Zenão (450 a. C) a Cauchy (1823) muitas descobertas aconteceram, Cauchy escreveu a definição, publicada na obra *Résumé des leçons sur le calcul infinitesimal* (Resumo das lições sobre cálculo infinitesimal), de limite, contendo uma forma rigorosa, mas em sua maioria de forma mais intuitiva, com algumas ideias vagas, porém sabia da importância e necessidade de formalizar essa ideia em um sistema numérico mais rigoroso, sem o auxílio da geometria. Foi então que Weierstrass, entre 1840 e 1850, iniciou esses estudos, os quais foram concretizados por Dedekind (1831 – 1916) e Peano (1851 – 1932), conhecidos hoje como "Axiomas de Peano" e "Cortes de Dedekind". Heine (1821-1881), aluno de Weierstrass, foi quem finalizou (em 1872) a definição de forma rigorosa que hoje é apresentada nos livros de Cálculo e nas salas de aula.

> [...] desde os paradoxos de Zenão (cerca de 450 a.C), passando pela Aritmetização da Análise com Weierstrass, no século XIX quando, segundo Geraldo Ávila (2006), a definição de limite de Cauchy – correta, porém ainda eivada da noção espúria de movimento - é substituída pela definição puramente numérica:
> $f(x)$ tem limite L com x tendendo a x_0 significa que dado qualquer $\varepsilon > 0$ tal que se $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ $(\mathrm{AMORIM}, 2011, \mathrm{P}. 29)$.

Saindo dos símbolos e voltando para a língua natural temos que: "quando valores sucessivos atribuídos a uma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo de modo a acabar diferindo dele tão pouco quanto se queira este último chama-se o limite dos outros dados" (CAUCHY, 1829 apud BOYER, 2010, p. 355). Assim, a partir dessa definição de Cauchy surgem mais definições, os conceitos de continuidade, diferenciabilidade e integral, consideradas como base do que conhecemos hoje.

A estrutura da disciplina de Cálculo em duas universidades

Ao voltarmos para sala de aula, e refletindo sobre esse conteúdo seja de forma intuitiva ou rigorosa, percebe-se a necessidade de entender um pouco mais sobre a disciplina de CDI. A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I não está presente somente na ementa de Licenciatura ou Bacharelado em Matemática, mas também nos cursos de Engenharias: Civil, Alimentos, Eletrônica, Ambiental, Produção Agroindustrial e em Ciências Econômicas, Ciências Contábeis e Administração, nas três últimas, às vezes, recebem o nome de Matemática Aplicada I e II. Assim, o ensino e aprendizagem do conceito de limite, foco da pesquisa, também estão presentes nessas graduações.

Dentro da disciplina de Cálculo Diferencial Integral I (ou Matemática Aplicada I e II), como em qualquer outra, é preciso ter um plano de ensino, faz parte dos documentos que regem a educação e nele é necessário conter ementa, objetivo, programa, metodologia, avaliação, bibliografia básica, bibliografia complementar. Nesta pesquisa, analisamos ementas[5], na qual a maioria dessas disciplinas contemplam os seguintes conteúdos: Pré-Cálculo; Funções Reais, Limite e Continuidade de funções de uma variável, Derivadas e suas aplicações e Integrais e suas aplicações. Geralmente, os professores seguem essa ordem de abordagem desses conteúdos na disciplina.

Os Quadros 1 e 3 exemplificam o plano de ensino da disciplina CDI I de Licenciatura em Matemática e os Quadros 2 e 4 exemplificam o plano de ensino da disciplina CDI I de Engenharia Ambiental, especificamente os itens de ementa e de programa (conteúdo: limite) relacionados em forma de tópicos de uma Universidade Federal e uma Universidade Estadual do Noroeste do Paraná.

Números reais e suas propriedades. Funções, limites e continuidade de funções reais e suas aplicações. Cálculo diferencial e aplicações. Polinômio de Taylor. Regra de L'Hôpital. Integrais de funções de uma variável e suas aplicações. Funções transcendentes. Técnicas de Integração. Equações diferenciais simples: Método de separação de variáveis. Sequências e Séries reais.

Quadro 1: Ementa do plano de ensino da disciplina de CDI I em Licenciatura em Matemática elaborado pelo professor do ano de 2016.
Fonte: Ementa do plano de ensino da Universidade Estadual

Sistematização dos conjuntos numéricos; Sistema cartesiano ortogonal; Relações e funções no espaço real bidimensional; Limites e continuidade de funções reais de variável real; Estudo das derivadas de funções reais de variável real; Estudo da variação de funções através dos sinais das derivadas; Teoremas fundamentais do cálculo diferencial; Estudo das diferenciais e suas aplicações; Fórmula de Taylor e de MacLaurin; Estudo das integrais indefinidas; Estudo das integrais definidas; Aplicações das integrais definidas.

Quadro 2: Ementa do plano de ensino da disciplina de CDI I em Engenharia Ambiental elaborado pelo professor do ano de 2017.
Fonte: Ementa do plano de ensino da Universidade Federal

[5]As ementas analisadas para esse trabalho referem-se a s disciplinas de CDI I e Matemática Aplicada I e II dos cursos de Engenharia de Alimentos, Ambiental, Civil, Eletrônica, Licenciatura em Química e Bacharelado em Ciências da Computação de uma Universidade Federal do Noroeste do Paraná e dos cursos de Licenciatura em Matemática, Engenharia de Produção Agroindustrial, Ciências Contábeis, Ciências Econômicas e Administração de uma Universidade Estadual do Noroeste do Paraná referente aos anos de 2016 e 2017.

Limites e Continuidade • Noção intuitiva de limite e continuidade; • Limites laterais. Definição de função contínua; • Limites infinitos;	• Limites de função composta; • Propriedades de limites. Teorema do confronto; • Limites fundamentais

Quadro 3: Programa da disciplina de CDI I em Licenciatura em Matemática do conteúdo de limite elaborado pelo professor do ano de 2016.
Fonte: Programa do plano de ensino da Universidade Estadual

Limites e continuidade de funções reais de uma variável real • Noção intuitiva e definição de limites. • Limites laterais, no infinito e infinito. • Limites de funções compostas.	• Funções contínuas. • Métodos matemáticos para o cálculo de limites. • Limites fundamentais.

Quadro 4: Programa da disciplina de CDI I em Engenharia Ambiental do conteúdo de limite elaborado pelo professor do ano de 2017.
Fonte: Programa do plano de ensino da Universidade Federal

Por esses quadros (1, 2, 3 e 4) é possível imaginar a ordem que a maioria dos professores abordaram, abordam e abordarão esse conteúdo nas salas de aula.

A dificuldade e inquietação tanto no ensino quanto na aprendizagem desse conteúdo, levantada por um dos autores no âmbito de sala de aula, são também apresentadas por alguns outros professores que concederam seus planos de ensino para análise e é relatada por Amorim (2011, p.37), "é de difícil apreensão e, consequentemente, traz dificuldades também para quem o ensina. É possível perceber que os alunos, de uma maneira geral, são capazes de realizar longas listas de atividades envolvendo tal assunto, sem que realmente tenham compreendido o conceito".

Rezende (2003), Cabral (2015), Ramos, Fonseca e Trevisan (2016) e Ibarra e Velázquez (2007) destacam a dificuldade existente na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, ressaltando o alto índice de reprovação na mesma, já citado anteriormente. Rezende (2003) especifica sobre o ensino de limite, tanto para alunos e professores onde o maior problema está na manipulação algébrica rigorosa e formal do que na apropriação do conceito em si. Isso demonstra que há uma preocupação geral com o resultado do cálculo do limite e não com o significado. Para Cornu (1991), o problema também existe e é o mesmo:

> [...] acredita que a dificuldade no ensino e na aprendizagem do conceito de limite não se restringe à riqueza e complexidade do assunto, mas também reside no fato de que os aspectos cognitivos envolvidos nesse processo não podem ser gerados apenas a partir da definição matemática. Há alguns aspectos do conceito de limite que apenas são compreendidos pela intuição, que é o caso do caráter dinâmico deste conceito. O fato é que, de uma maneira geral, os estudantes acabam não se apropriando do conceito formal de limite:

> "Lembrar a definição de limite é uma coisa, adquirir a concepção fundamental é outra (CORNU, 1991, p. 153).

Revendo a história e destacando a importância desse conteúdo tanto na sua construção (histórica) como as possíveis abordagens em sala de aula e suas dificuldades, buscamos assim, com essa pesquisa analisar os livros-textos, base para a disciplina e para tal conteúdo, a forma como é abordado e encaminhado o conteúdo limite e continuidade de funções de uma variável.

Essa reflexão é feita à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Duval (2011). Ficaremos atentos as possíveis conversões e tratamentos realizados nas abordagens, para resolução, em cada seção, inclusive nas tarefas propostas.

Dessa forma, vamos considerar que *Conversão* é uma transformação que faz mudar a representação de um objeto em um registro para uma representação do mesmo objeto em outro registro. Requer, do indivíduo, a coordenação de diferentes sistemas semióticos para ser posta em prática (DUVAL, 2009, apud, CARGNIN, 2013).

E, *Tratamento* é uma transformação de representação que ocorre dentro de um mesmo registro, é interna a ele. No tratamento, uma representação inicial é transformada numa representação final sem mudar o RRS. O tratamento em um RRS corresponde à função discursiva de expansão informacional/discursiva (DUVAL, 2009, apud, CARGNIN, 2013).

Livros-textos: Referências básicas em planos de ensino para o ensino de cálculo

A partir desses relatos de dificuldades tanto dos autores dessa pesquisa quanto de outros autores, busca-se analisar como os livros-textos abordam esse conceito. Segundo Pereira Netto (2016), a análise teórica desse tópico nos livros de CDI encontra-se bem desenvolvida, principalmente do ponto de vista do rigor matemático. Talvez devido a isso, juntamente com a falta de preparo dos alunos em compreender conceitos e idéias abstratas, parece que esses itens são apresentados de forma isolada, como se a ligação entre eles fosse puramente matemática.

O objetivo da pesquisa foi de comparar e analisar como os autores orientam a abordagem desse conteúdo em dois livros escolhidos. Esses livros fazem parte da maioria das referências básicas para a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I e Matemática Aplicada I e II dos planos de ensino analisados.

- **O Cálculo com Geometria Analítica** – Louis Leithold

O livro *"O Cálculo com Geometria Analítica"*– Louis Leithold – Volume 1. 3ª edição. São Paulo: Harbra, 1994. Foi usado como referência básica durante a graduação da primeira autora, serviu como base para a primeira experiência como docente no Ensino Superior (volume 1 e 2) e, norteou as aulas da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I em 2016, no curso de Licenciatura em Matemática, Matemática Aplicada a Ciências Econômicas e Contábeis.

- **Cálculo**– James Stewart

O livro "*Cálculo*"– James Stewart – Volume 1. Tradução da 7ª edição norte americana. São Paulo: Cengage Learning, 2013. Foram usadas versões anteriores como referência complementar durante a graduação e essa versão serviu como apoio para a primeira experiência como docente no Ensino Superior (volume 1 e 2). A escolha pela 7ª edição se deu por conta das possíveis melhorias nas abordagens que cada edição pode trazer.

Para compreensão da comparação entre os livros, chamaremos o livro do Leithold (1994) de **Livro 1** e o livro do Stewart (2013) de **Livro 2.** As análises foram feitas no sumário, no prefácio, na questão preocupação com o leitor, na abertura no capítulo que aborda o conteúdo limite, na introdução ao conteúdo, na formalização, tratado como limite por definição e na seção de tarefas referente à introdução e formalização do conteúdo.

Livro 1 - Capítulo 2: "*Limites e Continuidade*" (p.55 a 137)	Livro 2 – Capítulo 2: *"Limites e Derivadas*" (p.75 a 130)
2.1) O Limite de uma Função 2.2) Teoremas sobre Limites de Funções 2.3) Limites Laterais 2.4) Limites Infinitos 2.5) Limites no Infinito 2.6) Continuidade de uma Função em um Número 2.7) Continuidade de uma Função Composta e Continuidade em um Intervalo 2.8) Continuidade de Funções Trigonométricas e o Teorema do Confronto de Limites (ou Teorema do "sanduíche") 2.9) Prova de Alguns Teoremas sobre Limites de Funções (Suplementar) 2.10) Teoremas Adicionais de Limites de Funções (Suplementar) *Exercícios de Revisão*	2.1Os problemas da Tangente e da Velocidade 2.2 O Limite de uma Função 2.3 Cálculos Usando Propriedades dos Limites 2.4 A Definição Precisa de um Limite 2.5 Continuidade 2.6 Limites no Infinito; Assíntotas Horizontais 2.7 Derivadas e Taxas de Variação Projeto Escrito ■ Métodos Iniciais para Encontrar Tangentes 2.8 A Derivada como uma Função Revisão Problemas Quentes

Quadro 5: Sumário dos livros de Cálculo analisados no tópico "*Limites*".
Fonte: Livros-texto: LEITHOLD (1994, p. V) e STEWART (2013, p. V)

No livro didático do Leithold (1994) o conteúdo "limite" é abordado no capítulo todo. Já o livro didático do Stewart (2013), o interesse da análise limita-se às seções 2.1 a 2.6, mostrado no Quadro 5. Como o foco é Limite e Continuidade de funções e as seções 2.7 e 2.8 referem-se ao conteúdo derivadas e taxas de variações, os dois últimos tópicos não serão analisados nesta pesquisa.

É notável a diferença entre as abordagens já no sumário, o livro 1, separado por tópicos referente a limite, mostra abordagem de forma separada, como subconteúdos. Chamaremos essa abordagem de tradicional[6]. O livro 2 percebe-se de forma explícita a ideia intuitiva inicial de derivada relacionando-a com limites. Talvez por essa opção de abordagem, traz de forma não-tradicional, por meio de problemas a serem resolvidos.

Livro 1	Livro 2
"As explanações passo-a-passo, os inúmeros exemplos descritos e a ampla variedade de exercícios continuam a ser os aspectos relevantes do livro nesta edição. Uma vez que um livro-texto deve ser escrito para estudante, empenhei-me em manter uma apresentação de acordo coma experiência e a maturidade de um principiante, sem deixar que qualquer passagem fosse omitida ou ficasse sem explicação" (LEITHOLD, 1994, Prefácio, p. IX). "Com a secção sobre limites no infinito introduzida neste capítulo, a discussão de limite e continuidade é concluída em um mesmo capítulo. Esses tópicos constituem a essência de um curso inicial de Cálculo. Todos os teoremas de limites são enunciados, e algumas provas são apresentadas no texto, enquanto outras são propostas como exercícios. Nesta edição há exemplos e exercícios novos que envolvem o uso de calculadoras para lançar conjecturas sobre um determinado limite" (LEITHOLD, 1994, p. X).	No prefácio: 1) Filosofia do livro; 2) O que há de novo na 7ª edição; 3) Aprimoramentos 4)Tecnológicos; 5) Recursos; 6) Conteúdo; 7) Trilha; 8) Teste de verificação

Quadro 6: Preocupação com o leitor referente à elaboração dos livros
Fonte: Livros-texto: LEITHOLD (1994, p. IX-XIII) e STEWART (2013, p. IX-XXV)

O livro 1 (Quadro 6) inicia o prefácio com a seguinte frase de Albert Einstein "Tudo deveria se tornar o mais simples possível, mas não simplificado".

Traz um pouco da abordagem de cada um dos *19 capítulos* e o *20º capítulo* é apenas para versão brasileira. As *seções suplementares* referem-se às seções que podem ser trabalhadas além do conteúdo básico exigido pelas ementas, tem cunho teórico (teoremas) e materiais adicionais. *Exemplos e ilustrações* presentes em todas as seções "foram cuidadosamente escolhidos para preparar os estudantes para os exercícios" (p. XIII). *Exercícios* são 7400 revisados e ordenados de acordo com o grau de dificuldades, uma variedade no sentido de problemas teóricos e aplicados até aqueles que são computacionais. E, *gráficos tridimensionais* destacam nessa edição a necessidade do aluno visualizar, para melhor entendimento, 200 figuras de gráficos tridimensionais.

A 7ª edição do Livro 2 (Quadro 6) mostra algo interessante no *prefácio,* destaca o que essa edição traz de novo, como renovação de exemplos, de gráficos, a busca pela clareza nos enunciados de exercícios ou motivação. No item *aprimoramentos tecnológicos* traz uma nota sobre uma ferramenta tecnológica para o auxilio dos professores disponíveis no site do autor

[6]Chamaremos de forma tradicional de ensinar, aquela que aborda os conteúdos sem envolver contexto, que segue um ciclo: definição, exemplos com as mesmas finalidades, sem explorar muitas conversões.

(*Tools for Enriching Calculus (TEC))*. Outros itens como *recursos* citam situações-problema, listando quais são e em quais seções se encontram. *Exercícios com dificuldades progressivas* envolvem aplicações e até demonstrações de forma progressiva que buscam motivar o aluno a construir o conhecimento. *Dados reais* para auxiliar na introdução de cada conteúdo. *Projetos* aprofundados com o objetivo de fazer o aluno trabalhar, se empenhar, buscar. *Resolução de problemas* chamados no decorrer do livro de problemas quentes de forma a desafiar os alunos. *Tecnologias* uma opção, uma contribuição, um auxílio não uma obrigação para quem utiliza o livro. A edição também apresenta uma lauda sobre uma pesquisa entre alunos e professores chamada de *trilha* e refere-se a uma estratégia de ensino e aprendizagem (Quadro7), "Trilha é uma solução de ensino e aprendizagem diferente de todas as demais!" (p. XVIII). A edição também apresenta um *teste de verificação* (tarefas) de Álgebra, de Geometria Analítica, Funções, Trigonometria. Esse teste foi baseado em conteúdos abordados na Educação Básica e são pré-requisitos (chamado de pré-cálculo nas ementas) para a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

Problemas de Desafio (para capítulos selecionados, com soluções e respostas) • Problemas Arquivados para todos os capítulos, com soluções e respostas • Slides de Power Point • Revisão de Álgebra (em inglês) • Revisão de Geometria Analítica (em inglês) • Suplemento: *Mentiras que minha calculadora e computador me contaram* com exercícios e soluções • Manual do professor (material em inglês, para professores que adotam a obra)

Quadro 7 - Novidade da 7ª edição no livro Cálculo "Trilha"
Fonte: STEWART (2013, p. XVIII).

A abertura do capítulo 2 é distinta nos livros analisados conforme mostra a Figura 2, ressaltando as informações do prefácio, o Livro 1 abre o capítulo com um algoritmo a ser resolvido e o Livro 2, com uma descoberta "velocidade de um objeto em queda". A abordagem de um conteúdo pode favorecer ou dificultar o entendimento do mesmo.

Livro 1	Livro 2

"Uma bola cai com cada vez mais velocidade com o passar do tempo. Galileu descobriu que a distância da queda é proporcional ao quadrado do tempo em que ela está em queda. O Cálculo então nos permite conhecer a velocidade da bola em um dado momento."

Figura 2: Abertura do capítulo 2 "limite"
Fonte: Livros-texto (LEITHOLD, 1994, p. 55) e (STEWART, 2013, p. 75)

A abordagem do Livro 1 (Figura 3) para esse conteúdo começa de forma intuitiva. Acontece como uma investigação em relação a um ponto fora do domínio da função, chamada de restrição. A investigação acontece contornando a restrição. Junto a ela, o autor introduz o conceito de ε (épsilon) e δ (delta) por meio de valores em tabelas e, depois, vai apresentando a formalidade da definição.

Para iniciar nosso estudo de limites, vamos considerar uma dada função:

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1} \qquad (1)$$

Observe que $f(x)$ existe para todo x, exceto $x = 1$. Investigaremos os valores da função quando x está próximo de 1, porém excluindo o 1. A ilustração seguinte mostra como a função definida por (1) pode surgir e por que estaríamos interessados em considerar tais valores funcionais.

Figura 3: Apresentação de uma função, com exceção em um ponto, Livro 1
Fonte: (LEITHOLD, 1994, p. 56)

Tabela 1

x	$f(x) = \frac{2x^2+x-3}{x-1}$
0	3
0,25	3,5
0,5	4
0,75	4,5
0,9	4,8
0,99	4,98
0,999	4,998
0,9999	4,9998
0,99999	4,99998

Tabela 2

x	$f(x) = \frac{2x^2+x-3}{x-1}$
2	7
1,75	6,5
1,5	6,0
1,25	5,5
1,1	5,2
1,01	5,02
1,001	5,002
1,0001	5,0002
1,00001	5,00002

Figura 4: Aproximação de $x \to 1$ pela esquerda e pela direita em $f(x)$– Livro 1
Fonte: (LEITHOLD, 1994, p. 56-57).

A Figura 4 ilustra essa aproximação calculada pela Figura 3, e introduz o ε (épsilon) e δ (delta) graficamente, atribuindo valores numéricos para compreensão.

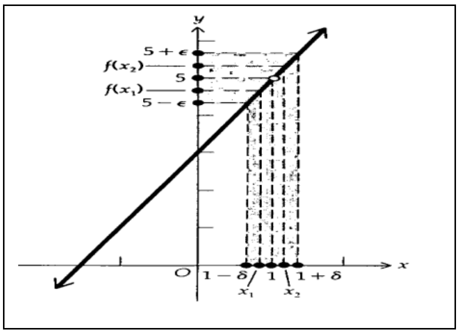

Figura 5: Representação gráfica da Figura 3 – Livro 1

Fonte: (LEITHOLD, 1994, p. 58).

Assim, conforme explanado, de forma intuitiva, mostrando de onde vem cada valor para o referido exemplo (Figura 3, 4 e 5), se constrói a definição de limite de uma função (Figura 6 e 7), a mesma citada na abordagem histórica dessa pesquisa. Somente depois dessa conclusão que vem a formalização desse conteúdo.

Resumindo esse exemplo, afirmamos que $\lim_{x \to 1} f(x) = 5$, pois para qualquer $\epsilon > 0$, não importa o quão pequeno ele seja, existe um $\delta > 0$, tal que

se $0 < |x - 1| < \delta$ então $|f(x) - 5| < \epsilon$

Agora, definiremos o limite de uma função em geral.

Figura 6: Conclusão da Figura 3, 4 e 5 – Livro 1

Fonte: (LEITHOLD, 1994, p. 58)

Agora, definiremos o limite de uma função em geral.

2.1.1 DEFINIÇÃO

Seja f uma função definida para todo número em algum intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente no próprio número a. **O limite de $f(x)$ quando x tende a a será L,** escrito como

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se a seguinte afirmativa for verdadeira:

Dado $\epsilon > 0$ qualquer, existe um $\delta > 0$, tal que

se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \epsilon$ **(4)**

Figura 7: Apresentação da Definição de limite de uma função de forma rigorosa– Livro 1

Fonte: (LEITHOLD, 1994, p. 58)

Essa ideia, presentes nas páginas 55 a 63, ficou apenas em dois exemplos resolvidos e em 3 exemplos usando a intuição e um exemplo de forma dedutiva. Sem aplicações, sem situações que possam colocar em “cheque” a ideia intuitiva juntamente com a dedutiva, construída anteriormente. Na sequência do exemplo há um teorema e em seguida a lista de exercícios contendo 44 exercícios, dentre os quais do exercício 1 ao 22 resolve-se de forma similar aos exemplos 1, 2 e 3. A resolução dos exercícios 23 ao 42 são baseadas na experiência do exemplo 4. Os exercícios 43 e 44 são genéricos, no sentido de "a" ser qualquer número positivo ou negativo. Os demais tópicos ficam restritos a exemplos e exercícios de reprodução. Apenas na página 98, na seção 2.6 aparece a primeira aplicação, e não mais que dois exemplos com situações, até então, apenas funções matemática para ilustrar as definições, teoremas. Na secção de exercícios não é diferente, apenas uma possível aplicação (p. 106, exercício 44). As seções posteriores também não fogem à regra de no máximo duas situações para ilustrarem os conteúdos, os demais exemplos e exercícios são com funções matemática para provar, definir, demonstrar, calcular.

No que se refere às *Conversões* e T*ratamentos*, definições baseadas na TRRS (DUVAL, 2011), a parte analisada do Livro 1, são realizadas algumas conversões e tratamentos. É possível observar que na Figura 2 existe uma linguagem natural explicando o que está acontecendo, então da figura 2 para 3 ocorre uma conversão para Linguagem numérica, em relação a Figura 3 para a 4 ocorre uma conversão da linguagem numérica para a gráfica, voltando então para linguagem natural.

Nesta abordagem feita na introdução do conteúdo e nas tarefas propostas, as poucas conversões que existem foram realizadas da mesma forma que a maioria dos livros abordam, não houve a preocupação de fazer uma conversão da linguagem gráfica para algébrica ou natural, por exemplo. Os tratamentos foram realizados sempre num mesmo padrão.

Quanto à abordagem do Livro 2 (Figura 2), o conteúdo limite acontece junto com a ideia intuitiva de derivada, *problema da tangente e da velocidade.* Neste momento, o autor estabelece uma relação entre os dois conceitos.

Na sequência, enuncia e traz gráficos para ilustrar o *problema da tangente*, porém o exercício 1 pede para encontrar uma reta tangente a curva num ponto (representado graficamente na Figura 8 - lado direito) e, calcula para valores próximos ao ponto analisado (Figura 8 - lado esquerdo). A Figura 9 ilustra à medida que *Q* tende a *P* ao longo da parábola, as retas secantes correspondentes giram em torno de *P* e tendem à reta tangente *t*. O exemplo 2 tratou uma situação-problema. A seção 2.1 abordou de forma geral a ideia intuitiva de limites e derivadas e, com 9 exercícios (situações- problemas e exercícios para o incentivo de tecnologias).

x	m_{PQ}
2	3
1,5	2,5
1,1	2,1
1,01	2,01
1,001	2,001

x	m_{PQ}
0	1
0,5	1,5
0,9	1,9
0,99	1,99
0,999	1,999

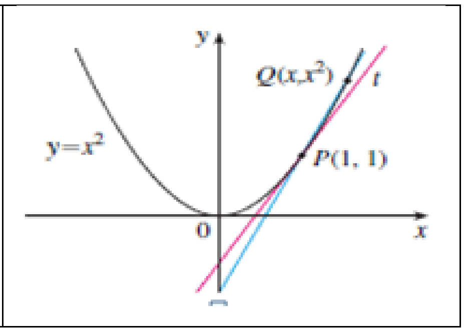

Figura 8: Aproximação de $x \to 1$ pela esquerda e pela direita em $f(x)$e representação gráfica do encontro da reta tangente a uma curva em uma ponto– Livro 2
Fonte: (STEWART, 2013, p. 76)

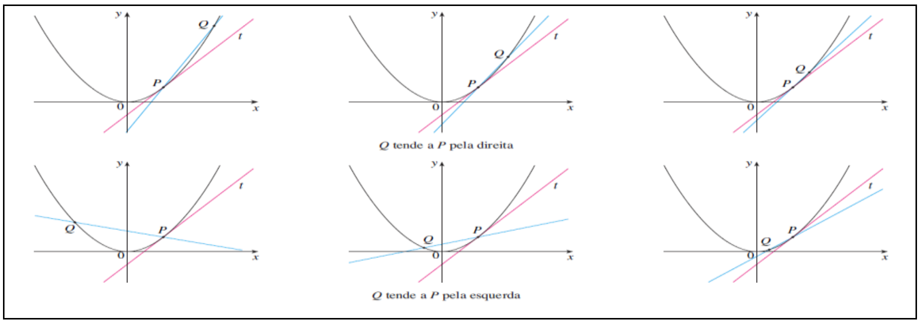

Figura 9: Ilustra o processo de limite que ocorre no exemplo.
Fonte: (STEWART, 2013, p.77)

Somente na sessão seguinte, 2.2 é que "O Limite de uma função" é abordado e faz menção ao problema da tangente (Figuras 8 e 9) e aborda outra função. Pode-se observar os detalhes da Figura 10, de forma a exemplificar, por valores calculados ao redor de $x \to a$ e graficamente a ideia de limite.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,0	2,000000	3,0	8,000000
1,5	2,750000	2,5	5,750000
1,8	3,440000	2,2	4,640000
1,9	3,710000	2,1	4,310000
1,95	3,852500	2,05	4,152500
1,99	3,970100	2,01	4,030100
1,995	3,985025	2,005	4,015025
1,999	3,997001	2,001	4,003001

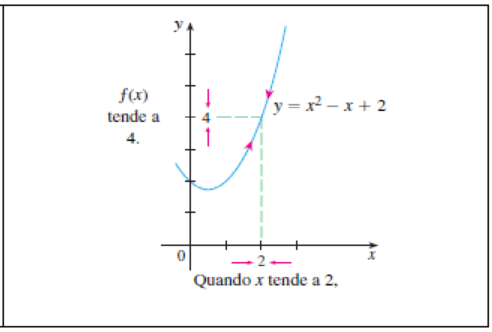

Figura 10: Aproximação de $x \to 2$ pela esquerda e pela direita em $f(x)$ e representação gráfica do valor da $f(x)$ $quando$ $x \to 2$ – Livro 2
Fonte: (STEWART, 2013, p.80)

Em seguida, o autor apresenta uma definição formalizada (semelhante à Figura 6), abordando algumas situações para diferenciar $\lim_{x \to a} f(x)$ *e* $f(a)$. Para essa apresentação são resolvidos 6 exemplos com as mais diversas funções, com uma abordagem para o erro de aproximação das calculadoras e, situações para construção do conceito.

Na sequência, o autor aborda "limites laterais" e "limites infinitos" com definições, propriedades diretas, teoremas, exemplos gráficos, várias funções em um mesmo gráfico para exemplificar algumas propriedades, e tabelas, porém uma única situação contextualizada (exemplo 6, p. 84) nessas seções, os demais exemplos resolvidos possuem características como: *"estime o limite da f(x)"; "determine o limite da f(x)"*. A seção de exercícios conta com 48 questões diferenciadas entre situações-problema, análise de gráficos. Percebe-se que para resolvê-las, o autor se preocupa com algumas *conversões* para representações (conversões entre linguagem algébrica para gráfica, da algébrica para a linguagem natural), como a questão 4 da

(p. 88). E *tratamentos* na linguagem natural, por exemplo, "*explique com suas palavras o que significa...*".

A próxima seção aborda as propriedades e teoremas para os cálculos de limite. Os exercícios relativos têm a preocupação com a escrita referente ao conteúdo, além de aplicar o conhecimento adquirido. Somente então, na próxima seção, a 2.4, é que apresenta a definição precisa de um limite com introdução de $\varepsilon\ (épsilon) e\ \delta\ (delta)$, de forma a fazer com que o aluno interprete a ideia (semelhante à Figura 4), só então apresenta a definição formalizada e com rigor matemático (semelhante à Figura 7).

Ainda nesta sessão, há definição de limites laterais (esquerda e direita) por $\varepsilon\ e\ \delta$. Nas laterais das laudas, o autor faz comentários que auxiliam na compreensão do que está sendo abordado, há também uma parte histórica sobre o conteúdo na lateral da página chamada de *"Cauchy e os limites".* São 44 exercícios nesta seção que usam gráficos para ilustrar o enunciado, algumas situações-problema. Mesmo parecendo diferente da análise do outro livro, o foco são as demonstrações e resolução de exercícios, sem contextualizações.

No que refere-se a *conversões e tratamentos*, o livro 2 oportuniza mais ao aluno a observação de até três tipos de representações, na seção de tarefas, para tomar uma decisão, obter uma resposta, ora fornece o gráfico para responder algebricamente e numericamente ora solicita a representação gráfica para responder tal questão (p. 108).

Considerações finais

Ibarra e Velázquez (2007) e Trevisan e Mendes (2015) mostram a possibilidade de lecionar a disciplina de CDI de forma não similar aos demais professores, ou seja, dinâmica, em uma ordem que julgarem conveniente, que a ordem estabelecida por ementas e livros são sugestões e não obrigações para serem seguidas fielmente. Ensinar por situações que explorem o raciocínio, que fazem sentido para o aluno, pode contribuir para uma melhor compreensão dos conceitos fundamentais do Cálculo.

Como relatam as pesquisas, a abordagem desse conteúdo, muitas vezes traz um desconforto para quem busca aprender, mas também para quem ensina.

Ao analisar os dois livros percebe-se que há fortemente um caráter estruturalista/formalista na organização do Leithold (1994). Quanto ao Stewart (2013) aproxima-se mais de uma abordagem intuicionista. A forma de abordagem deste conteúdo em questão foi diferente para os dois livros analisados. A relação entre professor e aluno e a forma como se apresenta tal conteúdo pode fazer a diferença para sucesso ou fracasso do ensino e da aprendizagem (LACHINI, 2001).

Na análise dos livros, percebe-se que os autores julgam suficiente poucos exemplos para noção intuitiva do aluno no objetivo de construção do conhecimento, não há uma retomada de ideia posteriormente, aceita-se que o aluno já a entendeu e está pronto a operar com todos os símbolos em formas mais rigorosas matematicamente. As definições e demonstrações são importantes para a formação, os alunos precisam ter esse contato de forma contínua durante a disciplina, há a necessidade de manter um equilíbrio entre intuição e o rigor.

De acordo com Duval (2011), as tarefas propostas, sejam no âmbito de explicação, explanação de conteúdo ou questões a serem resolvidas extraclasses necessitam ser classificadas como de formação de representação num sistema semiótico. O aluno necessita transitar em outras representações para construir o conhecimento. E alguns exercícios poderiam ser mais bem compreendidos se fossem trabalhados em diferentes registros, mas isso não acontece. Encontramos, também, poucas tarefas onde se solicitou o registro em língua natural, o que poderia contribuir para futuras demonstrações.

Referências

AMORIM, L. I. F. **A (RE) Construção do Conceito de Limite do Cálculo para a Análise: Um Estudo com Alunos do Curso de Licenciatura em Matemática.** Dissertação de mestrado. OURO PRETO 2011 Catalogação: sisbin@sisbin.ufop.br

BOYER, Carl B. **História da matemática**. 3ª. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

CABRAL, T. C. B. **Metodologias Alternativas e suas Vicissitudes: ensino de matemática para engenharias.** Revista do programa de pós-graduação em educação matemática da universidade federal de Mato Grosso do Sul (UFMS). Volume 8, Número 17-2015. ISSN 2359-2842.

CARGNIN, Claudete. **Ensino e aprendizagem da integral de Riemann de funções de uma variável real: possibilidades de articulação da utilização de Mapas Conceituais com a teoria dos Registros de Representações Semióticas.** 2013. 416 f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013.

CORNU, B. **Limits.** In: TALL, D. (Ed.) Advanced Mathematical Thinking. Londres: KluwerAcademic Publisher, p. 153-166, 1991.

CURY, H. N. Aprendizagem em Cálculo: uma experiência com avaliação formativa. In: **XXVIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional.** Santo Amaro, 2005. GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo.** 5ª. Ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

DUVAL, R. **Ver e ensinar Matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semiótica/organização.** Tania Campos. 1. ed. São Paulo: PROEM, 2011.

EVES, Howard. Introdução à história da matemática. Campinas: Unicamp, 2004.

IBARRA, M. E. ANDREU; VELÁZQUEZ, J. A. R.. Et si nousenrestions à Euler et Lagrange? **Annales de Didactiqueet de Sciences Cognitives**, v. 12, p. 165 - 187, 2007.

LACHINI, J. **Subsídios para explicar o fracasso de alunos em Cálculo.** In: LACHINI, J; LAUDARES J. B. (Orgs.) Educação Matemática: A prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo. Belo Horizonte: Fumarc, p. 146-190, 2001.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica** – Volume 1. São Paulo: Harbra, 1994

MELCHIORS, A.; SOARES, M. **HISTÓRIA DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL.** Maiêutica - Curso de Matemática. UNIASSELVI. Indaial- SC 2013

PEREIRA NETTO, J. C. **As Operações do Cálculo Diferencial e Integral: Parte I Limite**. Univ. Mogi das Cruzes. 2016. Disponível em: http://www.hottopos.com/regeq7/cardos1.htm

RAMOS, N.S.; FONSECA, M.O. dos S. TREVISAN, A.L. **Ambiente de Aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral Pautado em Episódios de Resolução de Tarefas.** Ponta Grossa. 2016. V SINECT. ISSN 2178-6135. Disponível em: www.sinect.com.br/2016

REZENDE, W. M. **O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica.** Tese de Doutorado. Faculdade de Educação. Universidade de São Paulo. São Paulo, 2003.

_________. **O Ensino de Cálculo: um problema do ensino superior de Matemática?** Anais do VIII ENEM, Mesa Redonda, Pernambuco, 2004.

SANTOS, S. P.; MATOS, M. G. O. O ensino de Cálculo I no curso de Licenciatura em Matemática: obstáculos na aprendizagem. **Revista Eventos Pedagógicos**, v.3, n.3, p. 458-473, ago./dez. 2012. SARUBBI, P. A.; SOARES, F.

STEWART, J. **Cálculo** – Volume 1. Tradução da 7ª edição norte americana. São Paulo: Cinge Learning, 2013.

TREVISAN, A. L.; MENDES, M. T. **Derivada, integral... limite no final: uma proposta para aulas de Cálculo.** In: XIII Encontro Paranaense de Educação Matemática, 2015, Ponta Grossa. Anais do XIII EPREM. Ponta Grossa: Editora da UEPG, 2015. v. único. p. 1-6.

THOMAS, G, B. **Cálculo**. Volume 1. São Paulo: Addison Wesley, 2009.