UMA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA SOBRE O PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS

Daniela Barbieri Vidotti
Universidade Estadual do Paraná - Paranavaí
dnbarbieri@hotmail.com

Lilian Akemi Kato
Universidade Estadual de Maringá
lilianakemikato@gmail.com

Resumo:
Neste estudo, uma atividade de Investigação Matemática foi desenvolvida com acadêmicos de licenciatura em matemática, a fim de introduzir e demonstrar o Princípio da Casa dos Pombos (PCB) - proposição matemática que afirma que se num pombal com m casas são postos $m+1$ pombos, então haverá uma casa com pelo menos dois pombos. No contexto dessa prática, objetivamos investigar como esta atividade poderia favorecer a compreensão do processo da demonstração matemática deste princípio, identificando também os aspectos que contribuíram para este propósito. Como referencial teórico, buscamos compreensões acerca do que é demonstração matemática no contexto da Educação Matemática, bem como as fases da Investigação Matemática, segundo os autores Ponte, Brocardo e Oliveira (2006). Os resultados mostraram que a atividade favoreceu a elaboração, pelos alunos, de uma demonstração para o PCB e alguns aspectos característicos da Investigação Matemática em Educação Matemática foram identificados, tais como (i) a procura de uma justificação aceitável para a solução da situação-problema; (ii) a utilização dos conhecimentos matemáticos que o estudante possui; (iii) a familiarização com a regra a ser demonstrada; (iv) a construção de argumentos para demonstrar.
Palavras-chave: Princípio da Casa dos Pombos. Demonstração matemática. Ensino de matemática.

Introdução

Um dos argumentos fundamentais da tendência Investigação Matemática em Educação Matemática consiste em levar o estudante a percorrer o caminho semelhante ao que os matemáticos fazem para se elaborar um princípio matemático, o que sinaliza implicar numa forma de aprender conceitos de matemática. Com essa intenção, os estudantes são conduzidos a elaborarem conjecturas que podem ser relações entre objetos matemáticos, tais como padrões, ordem, regularidades e, por sua vez, testá-las e prová-las (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2006).

Assim, identifica-se “aprender” matemática com “fazer” matemática, e a Investigação Matemática como tendência constitui-se numa forma possível de se construir conhecimentos. Nesse sentido, explorar situações-problema que favorecem a descoberta de relações matemáticas viabilizam a sua compreensão dando-lhes sentido. Nessa perspectiva, a matemática é vista como uma ciência que gera conhecimentos e não como um corpo de conhecimentos, composto por verdades absolutas (VAN DE WALLE, 2009).

Nos cursos de licenciatura em matemática, uma das necessidades dos acadêmicos é aprofundar os seus conhecimentos nas diversas áreas da matemática. Para isso, necessitam dominar as técnicas e, principalmente, os preceitos das demonstrações matemáticas. Esta tarefa, muitas vezes, se torna árdua, pois as teorias matemáticas produzidas em séculos de estudos científicos são transmitidas de “formas prontas e acabadas”. Por isso, acreditamos que a Investigação Matemática viabiliza o estudo dessas teorias.

Além disso, as discussões que tangem a formação inicial de professores denotam a necessidade de integração entre as disciplinas de conteúdos matemáticos e pedagógicos. Esta integração é vista como forma de minimizar os problemas de aprendizagem dos acadêmicos, tanto em conteúdos matemáticos do ensino básico (que são as principais preocupações dos professores de disciplinas pedagógicas, como metodologia de ensino e didática, por exemplo), como em conteúdos específicos do ensino superior (CURY, 2001).

Para além desses argumentos, ainda, quanto à importância de se orientar práticas pedagógicas em Investigação Matemática na formação inicial de professores, vale mencionar uma inferência feita por pesquisadores nesse campo de que os futuros professores devem ser envolvidos em atividades do mesmo tipo das quais se deseja que sejam desenvolvidas com seus alunos (SERRAZINA et al., 2002).

Considerando, portanto, esses, dentre outros aspectos, analisamos o desenvolvimento de uma atividade orientada pela Investigação Matemática, com acadêmicos do curso de licenciatura em matemática, a fim de obter subsídios para responder a seguinte questão: *Uma atividade de Investigação Matemática favorece a compreensão do processo da demonstração matemática? Em que aspectos?*

O papel da demonstração na matemática

Uma teoria matemática é basicamente formada por “definições” de conceitos e “demonstrações” das propriedades desses conceitos. De forma geral, definir um conceito significa dar-lhe significado, geralmente em termos de outros conceitos, previamente definidos. Analogamente, demonstrar a propriedade de um conceito (uma proposição), significa argumentar pelo estabelecimento da sua veracidade, a partir de outras propriedades já demonstradas. Assim, não sendo viável definir e provar todos os conceitos e propriedades que aparecem numa demonstração, muitas vezes recorre-se a conceitos não definidos e a proposições aceitas sem demonstração, constituindo a estrutura da teoria matemática: conceitos primitivos, conceitos derivados, axiomas e teoremas (BICUDO, 2002).

Mas, quando se mergulha no campo da matemática, há de se considerar as seguintes questões: há critérios para construir uma demonstração? Como decidir se uma sentença matemática é verdadeira ou falsa? Do ponto de vista da filosofia da matemática, estas questões têm a ver com o sentido epistemológico do termo demonstração. Segundo Bicudo (2002, p.81), a lógica matemática (estudo das formas de raciocínio matemático) define precisamente uma demonstração da seguinte forma:

> Caracteriza-se o que vem a ser um SISTEMA FORMAL, que é, grosseiramente falando, a parte sintática de um sistema axiomático [...]. De modo preciso, a primeira parte de um sistema formal é sua LINGUAGEM. Para especificá-la, devemos, antes de mais nada, mencionar-lhe seus SÍMBOLOS. Toda sequência finita de símbolos da linguagem é uma EXPRESSÃO da linguagem. Do conjunto das expressões, destaca-se um subconjunto, cujos membros são as FÓRMULAS da linguagem. Uma linguagem é considerada completamente especificada quando estiverem especificados seus símbolos e suas fórmulas. A parte seguinte de um sistema formal consiste nos seus AXIOMAS. A única exigência feita é que cada axioma seja uma fórmula da linguagem do sistema formal. Necessitamos, ainda, de uma terceira parte para um sistema formal, que nos capacite a concluir teoremas a partir dos axiomas. Isso é fornecido pelas REGRAS DE INFERÊNCIA. Cada uma delas afirma que, sob certas condições, uma fórmula, chamada a CONCLUSÃO da regra, pode ser INFERIDA de certas outras, chamadas as HIPÓTESES da regra. Uma regra em um sistema formal F é FINITA se tiver um número finito de hipóteses. Seja, agora, F um sistema formal em que todas as regras sejam finitas. Então, uma DEMONSTRAÇÃO em F é uma sequência finita de fórmulas, em que cada uma seja ou um axioma, ou seja, conclusão de uma regra cujas hipóteses precedam essa fórmula na sequência dada. Se A for a última fórmula em uma demonstração P, diremos que P é uma DEMONSTRAÇÃO de A. Uma fórmula A de F será um teorema de F se existir uma demonstração de A (BICUDO, 2002, p.81).

No entanto, de acordo com Stewart e Tall (1977, *apud* BICUDO, 2002), quando se analisa um teorema matemático para enquadrá-lo no que prescreve a lógica, conclui-se que os matemáticos não o escrevem da forma como descreve a lógica. Quando se submetem os resultados de um estudo matemático a especialistas, mesmo depois de incluir os detalhes solicitados, e a teoria ser aceita por seus pares, ainda assim, do ponto de vista da lógica, a demonstração pode ser considerada incompleta. Porém, não importa o que diz a lógica, os argumentos utilizados devem ser suficientes para convencer os especialistas no assunto.

Entretanto, isto não significa que não há métodos para demonstrar. Domingues (2002), ao fazer um breve resgate das demonstrações matemáticas ao longo dos séculos, mostrou que o progresso da matemática esteve aliado ao aperfeiçoamento dos métodos de demonstrações.

> Até perto do final do século XIX, a demonstração em matemática tinha um caráter grandemente material. A demonstração de uma proposição era uma atividade intelectual que visava a nos convencer e a convencer os outros, racional, mas também psicologicamente, da veracidade dessa proposição. A partir de algum momento, porém, tornou-se necessário submeter a noção de demonstração a uma análise mais profunda, com vistas a reduzir o recurso ao uso da evidência intuitiva. Capítulos importantes da matemática, como o cálculo, por exemplo, tinham sido explorados tão profundamente que a intuição apenas ou raciocínios heurístico-geométricos já não bastavam para explicar alguns resultados aparentemente paradoxais (DOMINGUES, 2002, p.61).

Diante da necessidade de explicar resultados materialmente impossíveis de se deduzir, surgiu o conceito de demonstração formal e mais tarde ao que denominamos hoje de método axiomático dedutivo. Tal conceito trata-se de uma sequência de proposições, sendo que a primeira é um axioma e as outras são deduzidas a partir desta até que se possa concluir aquilo que se queria demonstrar (DOMINGUES, 2002).

Esse movimento de axiomatização de sistemas matemáticos diversos, que consistiu em rever por este novo viés, teorias como a geometria euclidiana e a teoria dos números, por exemplo, culminou num movimento filosófico denominado *formalismo*, liderado por D. Hilbert (1852-1943), que objetivou "transformar a matemática na ciência das deduções formais, o que pressupunha, entre outras coisas, destituí-la de toda e qualquer conotação material" (DOMINGUES, 2002, p.63). Esta concepção formalista influenciou profundamente a forma de demonstrar os resultados matemáticos com a criação da *teoria da demonstração*, um método para estabelecer a consistência de um sistema formal qualquer.

O século XX foi dominado pelo formalismo, mas o método defendido pelos seus idealizadores não foi suficiente para preencher todos os vazios e por isso novos métodos têm sido testados, dentre os quais podemos citar aqueles que utilizam programas computacionais. Reconhecendo a dificuldade em se construir um método geral que possibilite estabelecer as verdades em todos os sistemas formais, conforme Hilbert aspirava, atualmente busca-se verificar as áreas onde cada método se mostra seguro.

A demonstração na Educação Matemática

Em sua tese de doutorado, Garnica (1995) investigou o significado da demonstração formal na formação do professor de matemática e, pautado numa vertente qualitativa e fundamentado na fenomenologia, analisou os discursos de professores que atuavam em cursos de licenciatura em matemática de diferentes áreas de pesquisa, constatando que

> [...] a prova rigorosa, sendo elemento fundamental para entender a prática científica da Matemática, seria também fundamental nos cursos de formação de professores, não como mero recurso técnico, mas numa abordagem crítica, que possibilitasse uma visada panorâmica nos modos de produção e manutenção da "ideologia da certeza" para que, a partir disso, pudessem ser produzidas formas alternativas de tratamento às argumentações sobre os objetos matemáticos em salas de aula reais (GARNICA, 2002, p. 93).

Portanto, Garnica sinalizou a necessidade de se analisar as diferentes formas de argumentações matemáticas realizadas em sala de aula, pois as demonstrações formais são importantes e devem ser estudadas pelos futuros professores, mas não são as únicas formas de se estabelecer as verdades matemáticas em situações de ensino e aprendizagem de matemática. Ainda, segundo este autor, a demonstração rigorosa, numa matemática formal, acadêmica, dirige-se mais à pratica profissional e deve ser mais estudada quanto a sua forma de utilização em sala de aula.

A partir de estudos sobre formas de linguagem, Garnica (2002) afirmou que em contextos de ensino e aprendizagem deve haver interconexão entre a linguagem natural, materna, e a linguagem matemática, artificial. A partir disso, juntamente com a comunidade de educadores, passou a considerar que a prova rigorosa é apenas uma dentre as várias formas de argumentação sobre o objeto matemático.

Considerou necessário estabelecer duas formas distintas de argumentações frequentemente empregadas na sala de aula: as justificações semiformais e as formais. O termo formal faz referência à formalização naturalmente exigida pela disciplina: símbolos, regras de formação, sistematizações diferentes daquelas dadas unicamente pela linguagem natural. As argumentações semiformais são aquelas nas quais a linguagem natural e elementos do dia-a-dia são essenciais.

Nas argumentações formais a linguagem natural também participa, pois, como já relatamos, ela é interconectada à linguagem matemática. No entanto, esta forma de argumentação na prática serve mais para uma mera tradução dos códigos matemáticos, do que para dar a esta formalização uma referência significativa, mais próxima às vivências do aluno. Fora da sala de aula outra categorização precisa ser estabelecida, pois não há um trabalho com a linguagem artificial da matemática, e o termo formal perde o sentido. Neste caso, têm-se as justificações do tipo não formais (GARNICA, 2001).

Desse modo, no campo da Educação Matemática as concepções acerca das demonstrações são tomadas de modo muito mais amplo que na matemática profissional. São amplas, pois, a concepção de matemática também é mais ampla, a ponto de ser denominada de Etnomatemáticas - um conjunto de práticas e de valores vinculados a essas práticas - que visa, sobretudo, ao aprendiz. Neste contexto, as demonstrações são entendidas como etnoargumentações e tem "a função de convencer, tomado "convencimento", aqui, como a negociação que se estabelece para a atribuição de significados" (GARNICA, 2002, p. 98).

Com base nestas considerações iniciais, teceremos uma análise da atividade desenvolvida com acadêmicos da licenciatura em matemática, que será descrita na próxima seção.

Percurso metodológico

Considerando nosso objetivo em investigar a questão "Uma atividade de Investigação Matemática favorece a compreensão do processo da demonstração matemática? Em que aspectos?" preparamos uma atividade investigativa envolvendo o Princípio da Casa dos Pombos e a desenvolvemos com 20 acadêmicos participantes do PIBID (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência) da Unespar – Campus Paranavaí, em um encontro organizado pela coordenadora do programa. A atividade foi conduzida pela pesquisadora (primeira autora deste texto), que solicitou aos acadêmicos para formar quatro grupos, de acordo com o ano/série de cada um, conforme o "Quadro 1", a seguir:

Grupos	**Nº de acadêmicos**	**Ano/Série**
Grupo 1	5, codificados por 1A; 1B; 1C; 1D; 1E	1º ano
Grupo 2	6, codificados por 2A; 2B; 2C; 2D; 2E; 2F	
Grupo 3	5, codificados por 3A; 3B; 3C; 3D; 3E	2º ano
Grupo 4	4, codificados por 4A; 4B; 4C; 4D	4º ano

Quadro 1 – Acadêmicos sujeitos da pesquisa
Fonte: As autoras (2017)

O Princípio da Casa dos Pombos (PCP*)* também conhecido como *Princípio das Gavetas de Dirichlet*, em homenagem ao matemático alemão Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-

1859) é uma proposição matemática que afirma que "se num pombal com m casas são postos $m+1$ pombos, então haverá uma casa com pelo menos dois pombos (COSTA, 2013, p.14)". Matematicamente, isto significa que "se o número de elementos de um conjunto finito A é maior do que o número de elementos de outro conjunto B, então uma função de A em B não pode ser injetiva (COSTA, 2013, p.14)". O PCP é útil para resolver inúmeros problemas, para tanto, identifica-se na situação desejada quem faz o papel das casas e dos pombos.

A atividade desenvolvida solicitava investigação sobre o número de fios de cabelos de indivíduos, com a intencionalidade de introduzir o PCP, bem como instigar os estudantes a levantarem conjecturas para demonstrá-lo[1]. Essa atividade foi planejada segundo as orientações e encaminhamentos da Investigação Matemática como tendência para o ensino de matemática. Nesse sentido, para seu desenvolvimento, recorremos as seguintes fases da Investigação: i) introdução da tarefa; ii) realização da investigação; iii) discussão dos resultados, conforme sugerem os autores Ponte, Brocardo e Oliveira (2006).

Seguindo essas ideias, a atividade realizada consistiu, inicialmente, em resolver a seguinte situação-problema: "*É possível assegurar que na capital paranaense existem ao menos duas pessoas com o mesmo número de fios de cabelos na cabeça? Encontre um argumento que confirme a veracidade de tua resposta".*

Juntamente com a situação-problema, foram propostas algumas orientações, sejam elas:

- supor que não há pessoas carecas.
- procurar o número de habitantes de Curitiba.
- procurar o número de fios de cabelos dos indivíduos.

Foi estipulado um tempo de 50 minutos para que os alunos concluíssem essa investigação, o que, de fato, ocorreu no tempo previsto.

Em seguida, distribuímos aos grupos um material impresso contendo o Princípio da Casa dos Pombos. Discutimos as relações deste princípio com a situação-problema que havíamos proposto, sobre o número de fios de cabelos e, solicitamos aos estudantes que fizessem uma demonstração para o PCP. Para esse desenvolvimento, os acadêmicos utilizaram um tempo de aproximadamente 50 minutos para concluírem a atividade e apresentarem oralmente a solução.

Momentos da investigação

[1] No sentido da Educação Matemática.

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), a realização de uma investigação matemática envolve quatro momentos principais, os quais incluem diversas atividades, como se indica no "Quadro 2", a seguir:

Exploração e formulação de questões	- Reconhecer uma situação problemática - Explorar a situação problemática - Formular questões
Conjecturas	- Organizar dados - Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)
Testes e reformulação	- Realizar testes - Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	- Justificar uma conjectura - Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Quadro 2: Momentos da investigação
Fonte: Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p.21)

Esses momentos acontecem, muitas vezes, simultaneamente e refletem a forma como a matemática é produzida pelos matemáticos profissionais. Segundo os autores citados, este trabalho está ao alcance dos estudantes na sala de aula de matemática, em atividades investigativas, e tentaremos destacá-lo nesta seção, com o relato da atividade supracitada.

Nesse sentido, a seguir apresentaremos as estratégias utilizadas por um dos grupos de acadêmicos da licenciatura em matemática que participaram da atividade proposta para fundamentar a nossa análise. O Grupo 4 foi eleito para este propósito, pois as discussões emergidas entre os integrantes do grupo deixaram evidentes as atividades características de uma Investigação Matemática, bem como a compreensão do processo de demonstração, considerando que nos outros grupos estas evidências apareceram de modo mais sutil.

Os acadêmicos que constituíram o Grupo 4 procederam da seguinte maneira[2]:

1) observaram que o número de fios de cabelos é finito;
2) consideraram haver um intervalo compreendendo o número mínimo e máximo de fios de cabelos;
3) havendo um intervalo, supuseram que poderiam calcular o desvio-padrão, um conceito que havia estudado na disciplina de estatística;
4) consideraram que não precisavam pesquisar o número de fios de cabelos, pois poderiam usar as letras como símbolos;
5) decidiram procurar na apostila de estatística as fórmulas de média, desvio-padrão e variância;

[2] Sistematizamos, enumerando essas estratégias.

6) perceberam que o número de habitantes era um número fixo e que eles precisavam de uma amostra para calcular o desvio-padrão;
7) discutiram que poderiam fazer um intervalo de confiança em torno da média;
8) analisaram as fórmulas para ver se era possível;
9) um dos acadêmicos sugeriu uma solução, porém, um dos integrantes não acatou, conforme evidenciam os recortes:

> ***4C:*** *Oh gente e se agente procurar o intervalo que está variando. Por exemplo, vamos supor que uma pessoa tenha em média de 100 a 300 mil fios de cabelos. E a população de Curitiba 800 mil pessoas. Então eu pego essas pessoas e tenho que jogar de 100 a 300 mil. Obviamente alguém vai se repetir. Porque eu tenho mais pessoas do que cabelos.*
> ***4D:*** *Então 4C, é o que a gente está tentando fazer. Agora, além disso, agente vai criar um intervalo de confiança em torno dessa média.*
> ***4C:*** *Mas se eu tiver a média não precisa fazer. Por que é só dividir, daí, dividindo eu consigo mostrar.*
> ***4D:*** *Mas e o intervalo como você faz?*
> ***4C:*** *Não sei, pesquisa, deve ter.*

10) discutiram a possibilidade de tomarem uma amostra hipotética;
11) a pesquisadora ouviu as explicações do grupo e inferiu que a ideia do integrante 4C fazia sentido e parecia ser mais simples. Então, sugeriu fixar um número máximo de fios de cabelos e questionou se era mesmo necessário considerar um número mínimo de fios e, se sim, qual seria esse número mínimo?
12) O integrante codificado por 4C considerou 300 mil como sendo o número máximo de fios e, percebeu que bastava dividir a população por 300 mil. O resultado seria o número mínimo de pessoas que possuem a mesma quantidade de cabelos (5,87);
13) o mesmo integrante 4C, explicou várias vezes o seu raciocínio, mas 4D não havia se convencido e citou o seguinte exemplo: *“Imagina, tem 5 cores de camisetas. E tem 30 pessoas. Divide 30 por 5, o que significa esse resultado?”*
14) 4C tentou explicar a 4D: *“O resultado significa que se repetiu”*.
15) 4D respondeu: “*Mas não é certo que se repetiu. Pode ser que tenha menos ou mais. Por isso acho que devíamos calcular a probabilidade”*.
16) 4C percebeu que a divisão não era necessária. Ela só serviria para ver que a divisão era maior que 1.
17) percebendo o impasse entre os dois integrantes do grupo e que o raciocínio de 4C era semelhante ao que havia ocorrido também nos outros grupos e, considerando que o tempo havia se esgotado, a pesquisadora interviu, usando o seguinte argumento:

> **Pesquisadora:** *acho que 4*C *está querendo dizer o seguinte: vamos enumerar as pessoas, suponha que a primeira só pode ter de 1 a 300 mil fios; a segunda só pode ter de 1 a 300 mil fios; a terceira só pode ter de 1 a 300 mil fios; e assim sucessivamente...Quando chegar na pessoa de número 300 001, já foram todas as possibilidades, vai ter que repetir a quantidade de fios de cabelos apresentado por outra. Porque esta só pode ter de 1 a 300 mil fios.*
> **4D:** *entendi professora, porque senão a conta não fecha. Agora entendi. É que quando divide não fica claro o que este número representa*.

18) a pesquisadora sugeriu que eles discutissem a melhor forma de escrever a solução, e deste modo, a solução apresentada por eles foi

Suponha que o número máximo de cabelos que uma pessoa tem seja 300 mil fios e que não existam pessoas carecas, ou seja, com 0 fio de cabelos. E que o número de habitantes da cidade de Curitiba seja de 1,752 milhões. Dividindo o número de habitantes pelo número máximo de fios de cabelo, temos 5,82 pessoas por número de fios de cabelos. Ou seja, como a divisão é maior do que 1, necessariamente irão se repetir o número de pessoas para cada quantidade de fios de cabelos. Como o número de habitantes é maior do que o número máximo de fios de cabelos, não é possível que exista uma quantidade diferente de fios de cabelo para cada habitante.

Ao delinearmos um olhar analítico para essas ações, é possível inferir que como os acadêmicos do quarto ano da licenciatura em matemática estavam cursando a disciplina de estatística naquele período, o estudo de alguns conceitos mobilizados no momento da *exploração e formulação de questões*, era recente. No entanto, a insistência em utilizar os conceitos de estatística fez com que este grupo utilizasse um tempo significativo da aula tentando resolver a situação-problema por este caminho.

Após algum tempo, a alternativa escolhida se mostrou infrutífera. Percebendo isso, um integrante do Grupo 4 apresentou uma conjectura diferente do que estavam procurando (estamos nos referindo à estratégia 9), fundamentado apenas no seu raciocínio lógico-matemático e, não nos conceitos de estatística. No entanto, encontrou resistência dos demais integrantes do grupo para aceitarem os seus argumentos. A busca por uma teoria matemática que resolvesse a situação-problema parecia mais conveniente do que uma solução baseada no raciocínio-lógico. Isso pode se justificar nos argumentos de Garnica (2001), quando infere que

> O aluno, via de regra, tem respondido segundo os cânones que pensa ser aqueles que o professor segue. Ele responde o que o professor quer ouvir. Isso porque a escola cuida de desenvolver uma forma de pensamento “correto”, hegemônico, mesmo que esse pensamento não seja aquele de que, naturalmente, o aluno se utiliza (GARNICA, 2001, p.74 - 75).

O próprio estudante 4D reconheceu ao final desta atividade que estava tão habituado a aplicar fórmulas e teoremas para resolver situações-problema matemáticas que não considerou que a resposta pudesse ser construída de outra maneira. Assim, a intervenção da pesquisadora foi necessária para estimular os acadêmicos a tomarem outro caminho, que já havia, inclusive, surgido nas discussões realizadas no grupo. Nesse sentido, a postura assumida vai ao encontro do que autores como Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) apontam sobre o papel do professor ser indispensável nestes casos.

Considerando as estratégias listadas, podemos compreender que ainda outras conjecturas foram formuladas por este grupo. Elas aparecem, por exemplo, nos itens 1, 2, 3, 6, 9, 12 e 16. Algumas foram *testadas, reformuladas e refinadas*.

E nesse contexto, destacamos a atitude do estudante 4C, pois cada vez que explicava o seu raciocínio ao grupo, um novo entendimento surgia, o que mostra uma evolução aparente de sua própria compreensão. Na estratégia 9, por exemplo, ficou evidente o uso da contagem ao "distribuir" as pessoas entre as possibilidades de quantidades de fios de cabelos; a estratégia 12 mostrou o uso da divisão; e, a 16 mostrou um refinamento do raciocínio, ao perceber o significado da divisão naquela situação-problema. A pesquisadora percebendo que a justificativa do estudante 4C era interessante, incentivou-o a explicar os seus argumentos aos membros do grupo, intencionando a sua *avaliação*. Este momento provocou novos testes e reformulações para que todos os integrantes ficassem satisfeitos com a solução.

Além desses aspectos revelados nos momentos da atividade, reconhecemos que o momento do registro também foi importante, constituindo nova oportunidade de justificar o raciocínio. Porém, assim como Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), também constatamos algumas dificuldades por parte desse grupo em conciliar a exploração da situação-problema com a escrita do registro dos resultados da investigação.

Com relação às estratégias utilizadas pelos Grupos 1, 2 e 3, o grande diferencial foi que estes estudantes não tentaram encontrar uma fórmula de estatística, como fez o Grupo 4. Simplesmente, buscaram as informações solicitadas nas orientações (o número de habitantes de Curitiba e o número médio de fios de cabelos) e discutiram sobre essas informações, formulando algumas questões, por exemplo: como nós iremos saber isso? Contando? Medindo a área da cabeça? Medindo onde existe cabelo? É preciso considerar a idade dos habitantes? E as crianças quantos fios têm em média? E quantas crianças nascem em Curitiba? O que é média? Qual o número mínimo e máximo de fios de cabelos? Gêmeos idênticos possuem a mesma quantidade de cabelos?

Também surgiram algumas alternativas: calcular a probabilidade; usar fórmulas prontas do Excel; estipular um número mínimo e máximo de fios de cabelos. Coincidentemente a última alternativa surgiu nos grupos 1 e 2. Contudo, após perceberem que o número de habitantes de Curitiba é um número maior do que o número máximo de fios de cabelos que uma pessoa pode ter, eles puderam conjecturar como afirmativa a questão que estava sendo investigada. Podemos ilustrar o surgimento desta afirmativa em cada um dos grupos com as falas dos estudantes pertencentes aos Grupos 1, 2 e 3, respectivamente:

> ***1E***:*Então agente pode ir colocado de um em um, o número de fios de cabelos, até chegar no* ***máximo***. *A partir daí vai se repetir o número de fios de cabelos.*
> **2A:** *Agente pensou em estipular que as pessoas tenham entre* ***250 a 300 mil fios***. *E que não há pessoas carecas. Então há 50 mil possibilidades. Vamos dividir o número de pessoas pelas possibilidades... 50 mil.*
> **3E:** *É possível assegurar porque existem mais pessoas em Curitiba do que a quantidade* ***máxima*** *de fios de cabelos. Uma pessoa pode ter de 0 a 150 mil fios. Se agente tiver mais de 150 mil pessoas, por exemplo, 151 mil, obrigatoriamente vai ter pelo menos 2 pessoas com a mesma quantidade.*

As conjecturas foram testadas, reformuladas, e avaliadas em cada grupo, sendo que todos apresentaram conclusões muito semelhantes àquela apresentada pelo Grupo 4.

Em relação à segunda parte da atividade, quando apresentamos o Princípio da Casa dos Pombos e solicitamos a sua demonstração, os integrantes do Grupo 4 alegaram não conhecerem o princípio, com aquele nome em específico, mas, recordaram de um corolário estudado na disciplina de análise na reta, sobre conjuntos finitos, que exprimia a mesma ideia: "não pode existir uma bijeção entre um conjunto finito e uma sua parte própria" (LIMA, 2014, p. 5).

Ao resgatarem e ressignificarem esse conhecimento, os alunos cogitaram a intenção de fazer a demonstração do Princípio da Casa dos Pombos, utilizando dos mesmos argumentos que apareciam na demonstração em Lima (2014), considerando que estavam com o livro de análise na reta em mãos. Com essa mobilização, os integrantes do Grupo 4 nos surpreenderam, pois a demonstração que consta em Lima (2014) é elaborada e rigorosa do ponto de vista da matemática profissional. No entanto, enfatizamos que nessa atividade, gostaríamos que eles percebessem a relação entre a demonstração do Princípio da Casa dos Pombos e a solução da situação-problema dos cabelos.

Após estas orientações, o Grupo 4 elaborou a seguinte demonstração:

Sendo m *casas e* $m+1$ *pombos a razão* $\frac{m+1}{m}>1$ *indica que, com certeza, haverá uma casa com pelo menos dois pombos.*

Tendo em vista que o argumento usado para justificar a solução da situação-problema dos cabelos foi o fato de o resultado da divisão entre o número de habitantes e o número máximo de fios de cabelo ser maior do que 1, inferimos que a atividade foi realizada com sucesso, dentro de nossas convicções. E, analisando a linguagem matemática utilizada neste registro (a demonstração do PCP feita pelo Grupo 4), aparentemente, ocorreu uma transformação da justificação semiformal dada à situação-problema dos cabelos numa justificação formal, no sentido da Educação Matemática, para o Princípio da Casa dos Pombos.

Resultados semelhantes foram alcançados pelos Grupos 1, 2 e 3. Por semelhante, queremos dizer que todos estabeleceram relações entre a situação-problema dos cabelos e o PCB e também apresentaram uma justificação formal para este princípio.

Na última fase cada grupo apresentou oralmente a solução da situação-problema dos cabelos e a demonstração do PCP. Foi o momento de refletir sobre o trabalho realizado e, de acordo com as explicações dos alunos, em geral, a princípio sentiram que a proposta era difícil, mas, ao final, todos se mostraram satisfeitos com as soluções encontradas.

Para completar essa implementação e, seguindo as recomendações de Garnica (1995, 2001 e 2002), seria oportuno que apresentássemos e discutíssemos uma demonstração formal (no sentido da matemática profissional) para o PCP, para que os acadêmicos pudessem perceber de que forma uma formalização matemática poderia ser escrita, a partir das demonstrações que eles construíram para o princípio. No entanto, infelizmente, não foi possível, dentro do horário disponibilizado para esta atividade.

Porém, deixamos como sugestão para uma futura implementação dessa atividade, a seguinte demonstração, adaptada de Morgado *et al* (2006):

Suponha por absurdo que cada casa contenha no máximo, um pombo. Assim, o número total de pombos nelas colocadas será, no máximo, m, o que é uma contradição, pois $m+1$ pombos foram distribuídos. Assim, pelo menos uma casa conterá mais de um pombo.

Considerações finais

Retomando a questão inicial: *Uma atividade de Investigação Matemática favorece a compreensão do processo de demonstração matemática? Em que aspectos?* Verificamos que na atividade desenvolvida, todos os grupos apresentaram uma justificação formal para o PCP, ou seja, uma forma coerente de argumentação sobre o objeto matemático em questão. Portanto, a atividade desenvolvida, seguindo as orientações da Investigação Matemática, no contexto desse estudo, favoreceu a compreensão do processo de demonstração matemática.

Além disso, pudemos verificar, no desenvolvimento da atividade supracitada, alguns aspectos que contribuíram para o seu desfecho, ou seja, a construção de uma demonstração para o PCP. Dentre eles, destacamos:

- a procura de uma justificação aceitável para a solução da situação-problema;
- a utilização dos conhecimentos matemáticos que o estudante possui;
- a familiarização com a regra a ser demonstrada;
- a construção de argumentos para demonstrar.

Tais aspectos são característicos da Investigação Matemática, conforme indicam os autores Ponte, Brocardo e Oliveira (2006). E esses aspectos auxiliaram na compreensão do processo de demonstração.

Vale destacar, que, ao invés de visualizarem o Princípio da Casa dos Pombos apenas como mais uma regra elaborada por matemáticos, ao pensarem numa solução para a situação-problema dos cabelos, os acadêmicos foram instigados a refletirem sobre a sua validade, e sobre o porquê de sua validade. O fato de alguns deles alegarem não conhecerem o princípio foi oportuno, pois do contrário, eles poderiam ter simplesmente aplicado este teorema para responder a situação-problema dos cabelos, e as discussões talvez, teriam sido menos frutíferas.

Referências

BICUDO, I. Demonstração em Matemática. **Bolema,** Rio Claro, SP, v. 15, n. 18, p.79-90, set. 2002.

COSTA, A. L. B. **O princípio da Casa dos Pombos no Ensino Básico**. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Instituto de Matemática Pura e Aplicada - PROFMAT – SBM, Rio de Janeiro, 2013.

CURY, Helena Noronha (Org.). **Formação de professores de matemática:** uma visão multifacetada. Porto Alegre: Edipucrs, 2001.

DOMINGUES, H. H. A Demonstração ao Longo dos Séculos. **Bolema,** Rio Claro, SP, v. 15, n. 18, p.55-67, set. 2002.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental:** formação de professores e aplicação em sala de aula. Porto Alegre: Artmed, 2009.

GARNICA, A. V. M. É necessário ser preciso? É preciso ser exato? "Um estudo sobre argumentação matemática" ou "uma investigação sobre a possibilidade de investigação". *In*:

CURY, Helena Noronha (Org.). **Formação de professores de matemática:** uma visão multifacetada. Porto Alegre: Edipucrs, 2001. p. 49-87.

GARNICA, A. V. M. **Fascínio da Técnica, Declínio da Crítica:** um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de Matemática. 1995. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1995.

GARNICA, A. V. M. As Demonstrações em Educação Matemática: um ensaio. **Bolema,** Rio Claro, SP, v. 15, n. 18, p.91-99, set. 2002.

LIMA, E. L. **Análise real:** funções de uma variável real. v.1. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

MORGADO, A. C. O.; CARVALHO, J. B. P.; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, P. **Análise Combinatória e Probabilidade.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemática na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

SERRAZINA, Lurdes et al. Investigações matemáticas e profissionais na formação de professores. In: ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2002, Coimbra. **Atas...** [S.l]:SEM/SPCE, [20--]. p. 41 - 58. Disponível em: <http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/2002/2002_04_LSerrazina.pdf>. Acesso em: 21 abr. 2017.